

COLLECTION CEA

**analyse mathématique
et calcul numérique
pour les sciences
et les techniques**

tome 1

**Robert DAUTRAY
Jacques-Louis LIONS**



SERIE SCIENTIFIQUE

MASSON 

CERIST

DU

BIBLIOTHEQUE

**ANALYSE MATHÉMATIQUE
ET
CALCUL NUMÉRIQUE
POUR LES SCIENCES ET LES TECHNIQUES**

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

COLLECTION

DU

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

1670/1

Collection patronnée par le Haut-Commissaire à l'Énergie Atomique
et publiée sous la direction de Paul BONNET

SÉRIE
SCIENTIFIQUE

Publiée sous la direction de Robert DAUTRAY
Membre de l'Institut

**ANALYSE MATHÉMATIQUE
ET
CALCUL NUMÉRIQUE
POUR LES SCIENCES
ET LES TECHNIQUES**

Robert DAUTRAY - Jacques-Louis LIONS

et pour le tome 1,

Michel ARTOLA, Marc AUTHIER, Philippe BÉNILAN, Michel CESSENAT,
Jean-Michel COMBES, André GERVAT, Hélène LANCHON,
Bertrand MERCIER, Claude WILD, Claude ZUILY.

★

TOME 1

MASSON

Paris New York Barcelone Milan
Mexico São Paulo

1984



Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© Commissariat à l'Energie Atomique, Paris 1984

ISSN : 0294-0248

ISBN : 2-225-80406-9

MASSON S.A.

120, Bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06

MASSON Publishing U.S.A. Inc.

133 East, 58th Street, New York, N.Y. 10022

TORAY MASSON

Balmes 151, Barcelona 8

MASSON ITALIA EDITORI S.p.A.

Via Giovanni Pascoli 55, 20133 Milano

MASSON EDITORES

Dakota 383, Colonia Napoles, Mexico 18 DF

EDITORIA MASSON DU BRASIL Ltda

Rua Dr Cesario Motta Jr. 61, 01221 Sao Paulo S.P.

TABLE DES MATIÈRES DU TOME I

CHAPITRE I. - EXEMPLES PHYSIQUES	1
Introduction	2
PARTIE A. - LES MODÈLES PHYSIQUES	3
§ 1. Fluides classiques et système de Navier-Stokes	3
1. Introduction : Origine mécanique	3
2. Problème mathématique correspondant	6
3. Linéarisation. Équations de Stokes	9
4. Cas d'un fluide parfait. Équations d'Euler	10
5. Cas des écoulements stationnaires. Exemples de problèmes linéaires	11
6. Écoulements non stationnaires conduisant à des équations de diffusion visqueuse	18
7. Transmission de la chaleur. Exemple linéaire en mécanique des fluides	21
8. Exemple de la propagation acoustique	27
9. Exemple avec des conditions aux limites de dérivées obliques	30
Bilan	32
§ 2. Élasticité linéaire	33
1. Introduction : Élasticité; hyperélasticité	33
2. Élasticité linéaire (non nécessairement isotrope)	34
3. Élasticité linéaire isotrope (ou élasticité classique)	37
4. Problèmes stationnaires en élasticité classique	39
5. Problèmes dynamiques en élasticité classique	43
6. Problèmes de diffusion thermique. Thermoélasticité classique	54
Bilan	59
§ 3. Viscoélasticité linéaire	60
1. Introduction	60
2. Matériaux à mémoire courte	61
3. Matériaux à mémoire longue	62
4. Cas particulier des milieux isotropes	63
5. Problèmes stationnaires en viscoélasticité classique	67
Bilan	67
§ 4. Électromagnétisme et équations de Maxwell	68
1. Équations fondamentales de l'électromagnétisme	68
2. Équations dites macroscopiques : Électromagnétisme dans les milieux continus	75
3. Potentiels. Transformation de jauge (cas de l'espace entier $\mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}_t$)	91
4. Quelques problèmes d'évolution	94

5. Électromagnétisme statique	99
6. Problèmes stationnaires	103
Bilan	126
§ 5. Neutronique. Équations du transport et de la diffusion	128
1. Problèmes du transport des neutrons	128
2. Problèmes de diffusion des neutrons	132
3. Problèmes stationnaires	137
Bilan	142
§ 6. Physique quantique	144
Introduction	144
1. Les principes fondamentaux intervenant dans la modélisation	146
2. Systèmes constitués par une particule	160
3. Systèmes de plusieurs particules	172
Bilan	177
Appendice. Éléments succincts concernant quelques notions mathématiques utilisées dans ce § 6	178
APPENDICE "MÉCANIQUE". ÉLÉMENTS CONCERNANT LES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE	183
§ 1. Calcul indiciel. Techniques élémentaires de calcul tensoriel	183
1. Tenseur d'orientation ou tenseur alterné fondamental dans \mathbb{R}^3	183
2. Possibilités de décompositions d'un tenseur du second ordre	185
3. Théorème de la divergence généralisée	186
4. Notions sur les torseurs	187
§ 2. Notations, langage et conventions en mécanique	189
1. Coordonnées de Lagrange et d'Euler	189
2. Notions de déplacement et de déformation	189
3. Notions de vitesse et de taux de déformation	191
4. Notions de dérivée particulaire, d'accélération et de dilatation	191
5. Notions de trajectoire et de ligne de courant	192
§ 3. Notions sur le principe des puissances virtuelles	194
1. Introduction Schématisation des efforts	194
2. Définitions préliminaires	194
3. Enoncé fondamental	197
4. Théorie du premier gradient	198
5. Application à la formulation des milieux curvilignes	201
6. Application à la formulation des plaques minces	205
Problèmes linéaires et non linéaires dans les § 1 à § 6 de ce chapitre I A	210
PARTIE B. PREMIER EXAMEN DES MODÈLES MATHÉMATIQUES	213
§ 1. Les principaux types d'équations aux dérivées partielles linéaires vues au chapitre I.A.	214
1. Équation du type de la diffusion	214
2. Équation du type des ondes	218

3. Équation de Schrödinger	220
4. Équation $Au = f$ où A est un opérateur linéaire ne dépendant pas du temps et f une donnée (équations stationnaires)	222
§ 2. Contraintes globales imposées aux solutions d'un problème : Appartenance à un espace fonctionnel; conditions aux limites; conditions initiales	226
1. Introduction. Espaces fonctionnels	226
2. Conditions initiales et problèmes d'évolution	227
3. Conditions aux limites	230
4. Conditions de transmission	240
5. Problèmes où interviennent des dérivées par rapport au temps de la fonction inconnue u sur le bord	242
6. Problèmes de retards	244
Bilan du chapitre I.B	245
Bibliographie du chapitre I	247
 CHAPITRE II. — L'OPÉRATEUR DE LAPLACE	255
Introduction	256
§ 1. L'opérateur de Laplace	257
1. Équation de Poisson	257
2. Exemples en mécanique et électrostatique	262
3. Formules de Green: Cadre classique	264
4. Le Laplacien en coordonnées polaires	269
§ 2. Fonctions harmoniques	276
1. Définition. Exemples. Solution élémentaire	276
2. Théorème de Gauss. Formules de la moyenne. Principe du maximum .	284
3. Formule intégrale de Poisson; régularité des fonctions harmoniques; inégalité de Harnack	291
4. Caractérisation des fonctions harmoniques. Élimination des singularités	300
5. Transformation de Kelvin; application aux fonctions harmoniques dans un ouvert non borné; transformation conforme	311
6. Quelques interprétations physiques (en mécanique et électrostatique)	321
§ 3. Potentiels newtoniens	325
1. Généralités sur les potentiels newtoniens d'une distribution à support compact	325
2. Étude de la régularité locale des solutions de l'équation de Poisson	335
3. Régularité des potentiels de simple et double couche	349
4. Potentiel newtonien d'une distribution non à support compact	363
5. Quelques interprétations physiques (en mécanique et électrostatique)	384
§ 4. Théorie classique du problème de Dirichlet	387
1. Généralités sur le problème de Dirichlet $P(\Omega, \varphi)$ dans le cas Ω borné: Solution classique, exemples, exposé de la méthode de Perron, solutions généralisées, point régulier du bord, fonction barrière	387
2. Généralités sur le problème de Dirichlet $P(\Omega, \varphi, f)$ et la fonction de Green de Ω dans le cas d'un ouvert borné	401
3. Généralités sur le problème de Dirichlet dans un ouvert non borné	415
4. Le problème de Neumann; problème mixte; principe du maximum de Hopf; exemples	432

5. Résolution par potentiels de simple et double couche : Méthode intégrale de Fredholm	447
6. Fonctions sous-harmoniques. Méthode de Perron	464
§ 5. Capacités *	471
1. Opérateurs capacités intérieur et extérieur	477
2. Équilibre électrique : Coefficients d'influence	489
3. Capacité d'une partie dans un ouvert de \mathbb{R}^n	506
§ 6. Régularité *	534
1. Régularité des solutions des problèmes de Dirichlet et Neumann	534
2. Régularité analytique et trace au bord d'une fonction harmonique	550
3. Problème de Dirichlet avec données mesures ou fonctions discontinues. Théorème de Herglotz	562
4. Problème de Neumann avec données mesures	580
5. Dépendance des solutions des problèmes de Dirichlet en fonction de l'ouvert : Formule d'Hadamard	586
§ 7. Autres méthodes de résolution du problème de Dirichlet *	592
1. Cas d'un ouvert convexe : Méthode intégrale de Neumann	592
2. Procédé alterné de Schwarz	601
3. Méthode de séparation des variables : Polynômes harmoniques. Fonctions harmoniques sphériques	610
4. Méthode de Dirichlet	632
5. Méthodes de symétrie et méthode des images	652
§ 8. Équations elliptiques du second ordre *	662
1. Forme divergente, formule de Green	663
2. Différentes notions de solutions. problèmes aux limites, conditions de transmission	670
3. Résultats généraux de régularité des solutions de problèmes elliptiques du second ordre	681
4. Résultats d'existence et d'unicité de solutions de problèmes aux limites strictement elliptiques du second ordre sur un ouvert borné	691
5. Inégalité de Harnack et principe du maximum	706
6. Fonctions de Green	727
7. Équation de Helmholtz	745
Bilan du chapitre II	762
Bibliographie du chapitre II	766
 CHAPITRE III. -- TRANSFORMATIONS FONCTIONNELLES	770
Introduction	772
 PARTIE A. - QUELQUES TRANSFORMATIONS UTILES DANS LES APPLICATIONS	778
§ 1. Séries de Fourier et problème de Dirichlet	773
1. Rappel sur les séries de Fourier	775
2. Rappel sur les distributions sur \mathbb{T} et les distributions périodiques	779
3. Séries de Fourier de distributions	781

TABLE DES MATIÈRES DU TOME I

XIX

4. Séries de Fourier et transformations de Fourier	786
5. Convergence au sens de Cesaro	788
6. Résolution du problème de Dirichlet à l'aide des séries de Fourier	790
§ 2. La transformation de Mellin	798
1. Généralités	798
2. Définition de la transformation de Mellin	800
3. Propriétés de la transformation de Mellin	802
4. Transformation de Mellin inverse	804
5. Applications de la transformation de Mellin	805
6. Table de quelques transformées de Mellin	813
§ 3. La transformation de Hankel	814
1. Généralités	814
2. Introduction aux fonctions de Bessel	815
3. Définition de la transformation de Hankel	821
4. La formule d'inversion	822
5. Propriétés de la transformation de Hankel	825
6. Applications de la transformation de Hankel aux équations aux dérivées partielles	828
7. Table de quelques transformées de Hankel	832
Bilan du chapitre III.A	833
 PARTIE B. — TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRÈTE ET TRANSFORMATIONS DE FOURIER RAPIDES	 835
§ 1. Introduction	835
§ 2. Accélération du produit d'une matrice par un vecteur	839
§ 3. La transformation de Fourier rapide de Cooley et Tukey	842
§ 4. Transformation de Fourier rapide de Good-Winograd	844
§ 5. Réduction du nombre de multiplications	847
1. Relation entre la transformation de Fourier discrète et le problème de convolution cyclique	847
2. Complexité du produit de deux polynômes	849
3. Application à la convolution cyclique d'ordre 2	851
4. Application à la convolution cyclique d'ordre 3	851
5. Application à la convolution cyclique d'ordre 6	854
§ 6. Transformation de Fourier rapide en dimension deux	857
§ 7. Quelques applications de la transformation de Fourier rapide	859
1. Résolution de problèmes aux limites	859
2. Régularisation ou lissage de fonctions	862
3. Calcul pratique de la transformée de Fourier d'un signal	863
4. Détermination du spectre de certains opérateurs de différences finies et solveurs rapides pour le Laplacien	865
Bilan du chapitre III.B	873
Bibliographie du chapitre III	873

CHAPITRE IV – ESPACES DE SOBOLEV	877
Introduction	878
§ 1. Espaces $H^1(\Omega)$, $H^m(\Omega)$	879
§ 2. Espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$	883
1. Définition et premières propriétés	883
2. Le dual topologique de $H^s(\mathbb{R}^n)$	886
3. L'équation $(-\Delta + k^2)u = f$ dans \mathbb{R}^n , $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	888
§ 3. Théorème de plongement de Sobolev	889
§ 4. Théorèmes de densité et de trace pour les espaces $H^m(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$)	892
1. Un théorème de densité	892
2. Un théorème de trace pour $H^1(\mathbb{R}^n)$	897
3. Trace des espaces $H^m(\mathbb{R}^n)$ et $H^m(\Omega)$	904
4. Propriétés de m -prolongement	906
§ 5. Les espaces $H^{-m}(\Omega)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$	913
§ 6. Compacité	917
§ 7. Quelques inégalités dans les espaces de Sobolev	920
1. Inégalité de Poincaré pour $H_0^1(\Omega)$ (resp. $H_0^m(\Omega)$)	920
2. L'inégalité de Poincaré pour $H^1(\Omega)$	922
3. Inégalités de convexité pour $H^m(\Omega)$	929
§ 8. Compléments	936
1. Espaces de Sobolev $H^{m,p}(\Omega)$	936
2. Espaces de Sobolev avec poids	938
Bilan du chapitre IV	940
APPENDICE. LES ESPACES $H^s(\Gamma)$, AVEC Γ BORD « RÉGULIER » D'UN OUVERT Ω DE \mathbb{R}^n	941
Bibliographie du chapitre IV	945
CHAPITRE V – OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES	947
Introduction	948
§ 1. Généralités sur les opérateurs différentiels linéaires	949
1. Caractérisation des opérateurs différentiels linéaires	949
2. Définitions diverses	953
3. Opérateur différentiel linéaire sur une variété	956
4. Caractéristiques	958
5. Opérateurs à coefficients analytiques. Théorème de Cauchy-Kowalewsky et Holmgren	966
§ 2. Opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants	974
1. Étude d'un o.d.l. à coefficients constants par transformation de Fourier	975
2. Solutions élémentaires d'un o.d.l. à coefficients constants	988

3. Caractérisation des opérateurs hyperboliques	998
4. Opérateurs paraboliques	1009
§ 3. Problème de Cauchy pour les opérateurs différentiels à coefficients constants	1013
1. Problème de Cauchy et solution élémentaire dans $\mathcal{L}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$	1014
2. Propagation dans les problèmes de Cauchy hyperboliques	1018
3. Choix d'un espace fonctionnel : Problème de Cauchy bien posé	1023
4. Problème de Cauchy bien posé dans \mathcal{S}'	1026
5. Opérateurs paraboliques et faiblement paraboliques	1030
6. Étude du cas particulier $P = \frac{\partial}{\partial t} + P_0$	1033
7. Problème de Cauchy bien posé dans \mathcal{L}' : Opérateur hyperbolique	1037
§ 4. Régularité locale des solutions *	1042
1. Caractérisation de l'hypo-ellipticité	1042
2. Analyticité des solutions	1046
3. Comparaison des opérateurs	1055
4. Régularité locale pour les opérateurs à coefficients variables de force constante	1058
5. Construction d'une solution élémentaire	1061
§ 5. Principe du maximum *	1065
1. Rappels	1065
2. Principe du maximum parabolique et dissipativité	1066
3. Caractérisation des opérateurs P vérifiant des principes du maximum	1074
Bilan du chapitre V	1084
Bibliographie du chapitre V	1085
 CHAPITRE VI. — OPÉRATEURS DANS LES ESPACES DE BANACH ET DANS LES ESPACES DE HILBERT	1087
Introduction	1088
§ 1. Quelques rappels d'analyse fonctionnelle. Espaces de Banach et de Hilbert	1089
1. Espaces vectoriels topologiques localement convexes. Espaces normés et de Banach	1089
2. Opérateurs linéaires	1094
3. Dualité	1103
4. Le théorème de Hahn-Banach et ses applications	1104
5. Bidual. Réflexivité. Convergence faible. Compacité faible	1108
6. Espaces de Hilbert	1116
7. Notions sur les fonctions de variable réelle ou complexe à valeurs dans un espace de Banach	1130
§ 2. Opérateurs linéaires dans les espaces de Banach	1132
1. Généralités sur les opérateurs linéaires	1132
2. Espaces d'opérateurs bornés	1137
3. Opérateurs fermés	1165
§ 3. Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert	1183
1. Opérateurs bornés dans les espaces de Hilbert	1185
2. Opérateurs non bornés dans les espaces de Hilbert	1197
Bilan du chapitre VI	1213
Bibliographie du chapitre VI	1213

CHAPITRE VII. — PROBLÈMES VARIATIONNELS LINÉAIRES.	
RÉGULARITÉ.	1211
Introduction	1216
§ 1. Théorie variationnelle elliptique	1217
1. Théorème de Lax-Milgram	1217
2. Premiers exemples	1220
3. Compléments dans le cas où L et H sont des espaces de distributions ou de fonctions	1225
4. Formes sesquilinéaires associées aux opérateurs elliptiques d'ordre deux	1226
5. Formes sesquilinéaires associées aux opérateurs elliptiques d'ordre $2m$	1230
6. Divers	1232
7. Application à la résolution de problèmes elliptiques généraux (de type Dirichlet)	1235
§ 2. Exemples de problèmes elliptiques du second ordre	1238
1. Généralités	1238
2. Exemples de problèmes variationnels	1239
3. Problèmes relatifs à des formes intégro-différentielles sur $\Omega \times \Gamma$	1243
4. Problème de transmission	1245
5. Divers	1249
6. Application : Équation multigroupe stationnaire de la diffusion des neutrons	1252
7. Application : Problèmes statiques d'élasticité	1256
8. Problèmes statiques de flexion de plaques	1266
§ 3. Régularité des solutions de problèmes variationnels	1271
1. Introduction	1271
2. Régularité intérieure	1272
3. Régularité globale des solutions de problèmes de Dirichlet et de Neumann pour des opérateurs elliptiques d'ordre deux	1280
4. Divers résultats de régularité globale	1284
5. Fonctions de Green	1289
Bilan du chapitre VII	1305
Bibliographie du chapitre VII	1307
ANNEXE. — "DISTRIBUTIONS"	1307
§ 1. Définition et premières propriétés des distributions	1308
1. Espace $\mathcal{D}(\Omega)$	1308
2. Espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω	1313
3. Quelques opérations élémentaires sur les distributions	1329
4. Quelques exemples	1338
§ 2. Convolution des distributions	1446
1. Convolution d'une distribution sur \mathbb{R}^n et d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	1446
2. Convolution de deux distributions dont une (au moins) est à support compact	1448
3. Distributions à supports convolutifs	1450
4. Algèbres de convolution	1454
§ 3. Transformation de Fourier	1456
1. Transformation de Fourier des fonctions de \mathcal{D}	1456

2. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	1358
3. Transformation de Fourier dans L^2	1362
4. Transformation de Fourier des distributions tempérées	1363
5. Transformation de Fourier des distributions à support compact	1366
6. Exemples de calcul de transformées de Fourier	1367
7. Transformation de Fourier partielle	1370
8. Transformation de Fourier et automorphismes de \mathbb{R}^n . Distributions homogènes	1375
9. Transformation de Fourier et convolution. Espaces $\mathcal{C}_M(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$..	1378
10. Transformation de Fourier des mesures tempérées	1381
11. Distribution $\gg 0$ (de type positif). Théorème de Bochner	1383
12. Le théorème des noyaux de L. Schwartz	1386
13. Quelques distributions et leurs transformées de Fourier	1390
Bibliographie de l'Annexe "Distributions"	1392
TABLE DES NOTATIONS	1393
INDEX	1405