

Université de Grenoble

Calculabilité des Langages

*Logique et Programmation*

*C3. Maîtrise d'Informatique*

---

*B. Vauquois*

CALCULABILITE DES LANGAGES

Bernard VAUQUOIS

Première Partie

## INTRODUCTION AUX LANGAGES, GRAMMAIRES ET AUTOMATES

I - CHAPITRE I

- I - 1 GENERALITES SUR LES LANGAGES
  - I-1-1 Définitions
  - I-1-2 Conventions et opérations sur les chaînes
  - I-1-3 Opérations sur les langages
  - I-1-4 Problèmes relatifs aux langages
  
- I - 2 GRAMMAIRES
  - I-2-1 Notion de grammaire
  - I-2-2 Grammaire syntagmatique
  - I-2-3 Classification de Chomsky des grammaires syntagmatiques
  - I-2-4 Equivalences
  
- I - 3 GENERALITES SUR LES AUTOMATES
  - I-3-1 Notion d'automate
  - I-3-2 Automates à états
  - I-3-3 Exemple
  - I-3-4 Transducteurs et accepteurs.

## I. CHAPITRE II - LANGAGES DE KLEENE

- II - 1 AUTOMATES ACCEPTEURS FINIS DETERMINISTES
  - II-1-1 Définitions
  - II-1-2 Représentation de l'accepteur fini déterministe
- II - 2 THEOREME DE NERODE
- II - 3 AUTOMATES ACCEPTEURS FINIS NON DETERMINISTES
  - II-3-1 Définition
  - II-3-2 Exemple
  - II-3-3 Automate déterministe équivalent à un automate non déterminis
- II - 4 GENERATION DES LANGAGES DE KLEENE
  - II-4-1 Génération du langage qui contient la chaîne  $\epsilon$
  - II-4-2 Automate associé à une grammaire de type 3
  - II-4-3 Grammaire de type 3 associé à un accepteur
- II - 5 PROPRIETES DES LANGAGES DE KLEENE
  - II-5-1 Complément
  - II-5-2 Intersection
  - II-5-3 Produit d'automate
  - II-5-4 Réunion
  - II-5-5 Langages finis
  - II-5-6 Produit
  - II-5-7 Opération \*
  - II-5-8 opération miroir
  - II-5-9 Théorème de Kleene
- II - 6 PROBLEMES DE DECISION
  - II-6-1 Problème du langage vide
  - II-6-2 Problème du langage infini
  - II-6-3 Problème de l'équivalence
- II - 7 ALGEBRE DES EXPRESSIONS REGULIERES
  - II-7-1 Définition d'une expression régulière
  - II-7-2 Langage défini par une expression régulière
  - II-7-3 Equations caractéristiques d'un langage régulier
  - II-7-4 Analyse d'un langage régulier

T- CHAPITRE III - LANGAGES HORS-CONTEXTE

- III - 1 REDUCTION DES GRAMMAIRES HORS CONTEXTE
  - III-1-1 Problème du langage vide
  - III-1-2 Elimination des symboles parasites
  - III-1-3 Elimination des symboles inaccessibles
  - III-1-4 Dérivation la plus à gauche
  - III-1-5 Elimination des productions superflues
  - III-1-6 Forme normale de N. Chomsky
  - III-1-7 Forme normale de S. Greibach
  
- III - 2 PROPRIETES DES LANGAGES HORS-CONTEXTE
  - III-2-1 Réunion
  - III-2-2 Produit
  - III-2-3 Opération étoile
  - III-2-4 Problème du langage infini
  - III-2-5 Problème de l'intersection ; langage de Schonberg
  - III-2-6 Langages hors-contexte contenant  $\epsilon$
  
- III - 3 INTERPRETATION - STRUCTURE SYNTAXIQUE
  - III-3-1 Arborecence associée à une dérivation
  - III-3-2 Cas particulier des langages de Kleene
  - III-3-3 Interprétation d'une structure syntaxique
  - III-3-4 Ambiguïtés
  
- III - 4 AUTOMATES A PILE
  - III-4-1 Définitions
  - III-4-2 Exemples
  - III-4-3 Equivalence de la famille des langages acceptés par état fini et de la famille des langages acceptés par pile vide
  - III-4-4 Equivalence de la famille des langages engendrés par grammaires hors-contexte et de la famille des langages acceptés par automates à pile
  - III-4-5 Intersection d'un langage hors-contexte et d'un langage de Kleene
  
- III - 5 PASSAGE A LA FORME NORMALE DE S. GREIBACH

## 1- CHAPITRE IV - CAS PARTICULIERS DE LANGAGES HORS-CONTEXTE

### IV - 1 LANGAGES DETERMINISTES

#### IV-1-1 Définition

#### IV-1-2 Complémentaire d'un langage déterministe

### IV - 2 GRAMMAIRES LR(k)

#### IV-2-1 Définition

#### IV-2-2 Exemples

#### IV-2-3 Non ambiguïté des grammaires LR(k)

#### IV-2-4 Algorithme de décision de la propriété LR(k) d'une grammaire hors-contexte

##### IV-2-4-1 - Premier résultat préliminaire

##### IV-2-4-2 - Deuxième résultat préliminaire

##### IV-2-4-3 - Algorithme de décision

### IV - 3 EQUIVALENCE DES LANGAGES DETERMINISTES ET LR(k)

#### IV-3-1 Automate déterministe associé à une grammaire LR(k)

#### IV-3-2 Grammaire LR(k) associée à un automate déterministe

## II. CHAPITRE I

---

### RAPPELS DE LOGIQUE

- I - 1.       PRESENTATION SEMANTIQUE DU CALCUL DES PROPOSITIONS
  - I - 1-1.     Notion de proposition
  - I - 1-2.     Opérateurs : connectives de proposition
  - I - 1-3.     Construction syntaxique des propositions
  - I - 1-4.     Tautologies et contradictions
  - I - 1-5.     Problèmes posés par la présentation sémantique du calcul des propositions
  
- I - 2.       NOTION DE SYSTEME FORMEL
  - I - 2-1.     Construction d'un système formel
  - I - 2-2.     Dérivation dans un système formel
  - I - 2-3.     Problèmes posés par les systèmes formels
  - I - 2-4.     Grammaires syntagmatiques et systèmes formels
  
- I - 3.       INTRODUCTION AU CALCUL DES PREDICATS ~~X~~
  - I - 3-1.     Notion de prédicat
  - I - 3-2.     Extensions d'un prédicat ; fonction caractéristique
  - I - 3-3.     Opérateurs : connectives de prédicats
  - I - 3-4.     Quantificateurs - variables libres, variables liées
  - I - 3-5.     Problèmes du calcul des prédicats.

- II - II - 1. CALCULABILITE INTUITIVE
- II - 2. DIFFICULTES DE LA NOTION D'ALGORITHME
- II - 3. CONVENTIONS SUR LES FONCTIONS
- II - 4. FONCTIONS DE BASE
- II - 4.1. Fonctions "constantes"
- II - 4.2. Fonctions "choix d'argument"
- II - 4.3. Fonctions "successeur"
- II - 5. COMPOSITION
- II - 6. GENERALISATION DE LA CONJONCTION DE PREDICATS

FONCTIONS RECURSIVES PRIMITIVES

- I-III-1 SCHEMA DE RECURSION PRIMITIVE
- III-2 CLASSE DES FONCTIONS RECURSIVES PRIMITIVES
- III-3 EXEMPLES DE FONCTIONS RECURSIVES PRIMITIVES
- III-4 PREDICATS ET ENSEMBLES RECURSIFS PRIMITIFS
- III-4-1. Définition
- III-4-2. Exemples de prédicats rékursifs primitifs
- III-4-3. Propriétés de fermeture.
- III-5 OPERATEUR "MINIMUM BORN-" D'UN PREDICAT
- III-5-1. Définition
- III-5-2. Propriété
- III-5-3. Autres exemples de fonctions et prédicats rékursifs primitifs

FONCTIONS RECURSIVES ET FONCTIONS PARTIELLES RECURSIVES

- I** IV-1. OPERATEUR MINIMUM D'UNE FONCTION
- IV-1.1 Définition
  - IV-1.2 Génération de fonctions partielles
- IV-2. CLASSES DES FONCTIONS RECURSIVES ET FONCTIONS PARTIELLES RECURSIVES
- IV-3. PREDICATS ET ENSEMBLES RECURSIFS.
- IV-3.1 Définition
  - IV-3.2 Propriétés

EQUIVALENCE DES FONCTIONS (PARTIELLES) RECURSIVES ET DES FONCTIONS  
(PARTIELLES) T-CALCULABLES

II - VI-1. CODIFICATION DE GÖDEL

VI-2. PREDICAT ASSOCIE AU CALCUL D'UNE MACHINE DE TURING

VI-2.1 Fonctions et prédicats sur les mots et suites de mots

VI-2.2 Fonctions et prédicats concernant la structure de base des  
machines de Turing

VI-2.3 Fonctions et prédicats concernant le calcul d'une machine de  
Turing.

VI-3. CONCLUSION

VI-4. MACHINE DE TURING UNIVERSELLE

## III CHAPITRE I

### Prédicats semi-calculables ; Ensembles récursivement énumérables

#### Notion de décidabilité.

- I.1        PREDICATS SEMI-CALCULABLES
  - I.1.1.    Définition
  - I.1.2.    Propriétés
  - I.1.3.    Condition nécessaire et suffisante de calculabilité
  - I.1.4.    Prédicat seulement semi-calculable
  
- I.2.        ENSEMBLES RECURSIVEMENT ENUMERABLES
  - I.2.1.    Définition
  - I.2.2.    Énumération des couples d'entiers
  - I.2.3.    Préservation de la semi-calculabilité par quantificateur
  - I.2.4.    Ensemble des valeurs d'une fonction partielle calculable
  - I.2.5.    Théorème d'énumération
  
- I.3.        NOTION DE DECIDABILITE
  - I.3.1.    Décidabilité et indécidabilité récursive d'un prédicat.
  - I.3.2.    Problème de décision du prédicat  $\forall T(x,x,y)$
  - I.3.3.    Problème de l'arrêt d'une machine de Turing.

## III - C H A P I T R E II

### SYSTEMES COMBINATOIRES

- III-II.1.1 PREDICATS NUMERIQUES ET PREDICATS DE MOTS
  
- II.2. CONSTRUCTION DE SYSTEMES COMBINATOIRES
  - II.2.1. Productions
  - II.2.2. Définition d'un système combinatoire
  - II.2.3. Preuve dans un système combinatoire
  - II.2.4. Théorème
  - II.2.5. Problème de décision pour un système combinatoire
  
- II.3. SYSTEMES COMBINATOIRES SEMI-THIENS ET GRAMMAIRES SYNTAGMATIQUES
  
- II.4. SYSTEMES COMBINATOIRES SEMI-THIENS ET MACHINES DE TURING
  
- II.5. EQUIVALENCE DES SYSTEMES SEMI-THIENS ET DES SYSTEMES NORMAUX

III - CHAPITRE III - PROBLEMES INDECIDABLES DE LA THEORIE DES LANGAGES

III - 1 PROBLEME DE CORRESPONDANCE DE POST

III - 2 APPLICATIONS AUX LANGAGES DECRITS PAR DES GRAMMAIRES  
SYNTAGMATIQUES

III-2-1 Langages  $Q(x)$

III-2-2 Langages  $Q(x,y)$  et  $Q'$

