

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE
Docteur de 3ème cycle
en MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
option : ANALYSE NUMÉRIQUE

Bernard LACOLLE



**QUELQUES PROBLEMES DE RESTRUCTURATION
DANS UN ENVIRONNEMENT PAGINE**

Soutenue le 14 septembre 1976 devant la commission d'examen :

Président : Monsieur N. GASTINEL

Examineurs : Monsieur P. JORRAND
Monsieur F. ROBERT
Monsieur M. SAKAROVITCH

INTRODUCTION

CHAPITRE I GESTION DE MEMOIRE PAGINEE ET EXPRESSIONS MATRICIELLES DE QUELQUES PROBLEMES DE RESTRUCTURATION

| | pages |
|---|-------|
| 1 Gestion de mémoire paginée et problèmes de restructuration | |
| 1.1. Un calculateur élémentaire..... | 1 |
| 1.2. Notations et Définitions | 1 |
| 1.3. Gestion de mémoire | |
| Gestion de mémoire valide..... | 3 |
| 1.4. Coût d'exécution en demandes de pages..... | 4 |
| 1.5. Gestion de mémoire "à la demande" et algorithme de remplacement..... | 5 |
| 1.6. Gestion de mémoire "valide" et gestion de mémoire "à la demande"..... | 6 |
| 1.7. Problèmes de restructuration..... | 7 |
| 2 Restructuration et changements de pages. Matrice d'Adresses jointives | |
| 2.1. Organisation de données..... | 9 |
| 2.2. Nombre de changements de pages : Matrice d'adresses jointives..... | 10 |
| 2.3. Nombre de demandes de pages : une seule page en mémoire opératoire..... | 12 |
| 2.4. Restructuration : Problème 1..... | 13 |
| 3 Gestion de mémoire et restructuration. Matrices d'Adresses jointives généralisées | |
| 3.1. Bornes inférieures pour le nombre de demandes de pages..... | 13 |
| 3.2. Algorithme de remplacement "LRU" et restructuration | 14 |
| 3.3. Algorithme de remplacement "Optimum" et restructuration..... | 19 |

CHAPITRE II FORMES MATRICIELLES EQUIVALENTES DES PROBLEMES DE
RESTRUCTURATION : PARTITIONNEMENT DE MATRICES ET
PROBLEMES DE DISTANCES EUCLIDIENNES MAXIMALES

| | | |
|------|--|----|
| 0 | Conventions de notations..... | 26 |
| 1 | Rappels de notations introduites au chapitre I | |
| 1.1. | La matrice d'adresses jointives..... | 27 |
| 1.2. | Les vecteurs d'organisation de données..... | 27 |
| 1.3. | Le problème d'optimisation..... | 27 |
| 2 | Quelques problèmes équivalents | |
| 2.1. | Transformation en un problème de maximum..... | 28 |
| 2.2. | Modification de la diagonale de la matrice d'adresses jointives..... | 28 |
| 2.3. | Problèmes à "tailles égales"..... | 30 |
| 3 | Quelques problèmes relatés aux problèmes à "tailles égales" | |
| 3.1. | Matrices bloc-diagonales et permutations : partitionnement de matrices..... | 32 |
| 3.2. | Partitionnement de graphes..... | 32 |
| 3.3. | Méthodes de résolutions..... | 33 |
| 4 | Problème de distance euclidienne maximale | |
| 4.1. | Problème..... | 34 |
| 4.2. | Matrices symétriques définies-positives..... | 35 |
| 4.3. | Matrices données par $A = \sum_{i=1}^p B_i B_i^T$; $B_i \in \mathbb{R}^n$.. | 36 |
| 4.4. | "Meilleure approximation de rang p" d'une matrice semi-définie-positve..... | 37 |
| 5 | Principe de projection pour des problèmes de distances euclidiennes maximales | |
| 5.1. | Notations..... | 39 |
| 5.2. | Principe de projection maximum : cas général..... | 40 |
| 5.3. | Principe de projection maximum : cas symétrique.. | 41 |
| 5.4. | Utilisation du principe précédent..... | 42 |

| | | |
|------|---|----|
| 6 | Méthodes à précision relative ϵ pour problèmes de distances euclidiennes maximales | |
| 6.1. | Définition..... | 42 |
| 6.2. | Ensembles $\mathcal{U}_\epsilon(m)$, $\mathcal{U}_\epsilon^s(m)$, $\mathcal{U}_\epsilon^+(m)$ | 43 |
| 6.3. | Théorème, cas non symétrique..... | 43 |
| 6.4. | Théorème, cas symétrique..... | 45 |
| 6.5. | Diminution a posteriori de l'erreur relative..... | 46 |
| 6.6. | Algorithmes d'énumération..... | 46 |
| 6.7. | Construction d'ensembles $\mathcal{U}_\epsilon(m)$, $\mathcal{U}_2^s(m)$ | 47 |

CHAPITRE III BIPARTITIONNEMENT DE MATRICES

| | | |
|------|--|----|
| 1 | Rappel et Elimination de contraintes | |
| 1.1. | Rappel. Présentation du chapitre..... | 56 |
| 1.2. | Elimination de contrainte par paramétrisation.... | 57 |
| 1.3. | Remarque..... | 58 |
| 1.4. | Notations..... | 58 |
| 2 | Matrices données par $A = \sum_{i=1}^p B_i B_i^T$ et principe du maximum | |
| 2.1. | Problème de maximum dans \mathbb{R}^p | 58 |
| 2.2. | Principe de projection maximum : cas général.... | 59 |
| 2.3. | Principe de projection maximum : cas symétrique.. | 62 |
| 2.4. | Relation cas symétrique et cas général..... | 63 |
| 2.5. | Méthodes exactes et approchées..... | 63 |
| 3 | Méthodes exactes $p = 1, 2$ | |
| 3.1. | $p = 1$ | 64 |
| 3.2. | $p = 2$ | 64 |
| 3.3. | Résultats numériques..... | 79 |
| 4 | Méthodes à précision relative ϵ : $p \ll n$ | |
| 4.1. | Méthode..... | 81 |
| 4.2. | Précision relative effective..... | 81 |
| 4.3. | Diminution a posteriori de l'erreur relative..... | 82 |
| 4.4. | Résultats numériques..... | 82 |

| | | |
|------|---|----|
| 5 | Bipartitionnement de matrices symétriques semi-définies-positives utilisant une meilleure approximation de rang p | |
| 5.1. | Méthode employée..... | 86 |
| 5.2. | Amélioration locale de la solution..... | 87 |
| 5.3. | Majorants..... | 87 |
| 5.4. | Résultats numériques..... | 89 |

CHAPITRE IV PARTITIONNEMENT "A TAILLES EGALES" DE MATRICES

| | | |
|------|--|-----|
| 1 | Rappel des problèmes..... | 92 |
| 2 | Majorants..... | |
| 2.1. | Théorème d'Hoffmann et Wielandt..... | 93 |
| 2.2. | Théorème..... | 93 |
| 2.3. | Valeurs propres et majorants pour les problèmes de partitionnement..... | 95 |
| 2.4. | Problèmes approchés liés aux valeurs et vecteurs propres et majorants pour le problème du partitionnement..... | 98 |
| 3 | Problèmes "à tailles égales" | |
| 3.1. | Matrices du type $A = B_1 B_1^T$ | 100 |
| 3.2. | Matrice donnée par $A = \sum_{i=1}^P B_i B_i^T$ | 103 |
| 3.3. | Matrice symétrique semi-définie-positive et résultats numériques..... | 108 |

CHAPITRE V QUELQUES APPLICATIONS DES TECHNIQUES DE RESTRUCTURATION

| | | |
|------|--|-----|
| 1 | Nature des applications possibles | |
| 1.1. | Restructuration et grands systèmes..... | 112 |
| 1.2. | Adaptation d'algorithmes à une mémoire virtuelle | 113 |
| 1.3. | Micro-calculateurs et mini-calculateurs..... | 113 |
| 1.4. | Optimisation de programme et compilation..... | 114 |

| | | |
|------|---|-----|
| 2 | Construction de matrices d'adresses jointives ou m-jointives | |
| 2.1. | Matrice d'adresses jointives et m-jointives..... | 115 |
| 2.2. | Un procédé de construction de matrices d'adresses m-jointives..... | 115 |
| 3 | Aspect pratique des méthodes de restructuration | |
| 3.1. | Les difficultés..... | 122 |
| 3.2. | Remarques générales sur les exemples traités..... | 122 |
| 4 | Exemples..... | 123 |
| 5 | Conclusion..... | 134 |

CHAPITRE VI

| | | |
|------|---|-----|
| 1 | "Complexité" des algorithmes à la précision relative ϵ | |
| 1.1. | Bipartitionnement..... | 139 |
| 1.2. | Problèmes de partitionnement à "tailles égales"..... | 141 |
| 2 | Problèmes de Clustering | |
| 2.1. | Restructuration et Clustering..... | 142 |
| 2.2. | Application du bipartitionnement de matrices du type $B_1 B_1^T + B_2 B_2^T$; $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^n$ | 143 |
| 2.3. | Autres possibilités..... | 148 |

BIBLIOGRAPHIE

