

TU 1970

N° d'ordre :

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

“ Mathématiques Appliquées ”

par

PHAM DINH TAO

Etude d'une classe de normes dans les espaces vectoriels à dimension finie générées par les normes des espaces fonctionnels de Banach. Applications.

Thèse soutenue le 14 Février 1972 devant la commission d'examen :

Monsieur N. GASTINEL Président

Messieurs F. ROBERT
P.J. LAURENT Examineurs

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

*A mes parents j'offre le fruit
de mon travail en reconnaissance de tout
ce qu'ils ont fait pour moi.*

*A mes frères et soeurs en
témoignage de mon affection.*

A tous ceux qui me sont chers.

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. ANGLES D'AURIAC Paul Mécanique des fluides
ARNAUD Georges Clinique des maladies infectieuses
ARNAUD Paul Chimie
AYANT Yves Physique approfondie
BARBIER Jean-Claude Physique expérimentale
BARBIER Reynold Géologie appliquée
BARJON Robert Physique nucléaire
BARNOUD Fernand Biosynthèse de la cellulose
BARRIE Joseph Clinique chirurgicale
BENOIT Jean Radioélectricité
BESSON Jean Electrochimie
BEZES Henri Chirurgie générale
BLAMBERT Maurice Mathématiques pures
BOLLIET Louis Informatique (IUT B)
BONNET Georges Electrotechnique
BONNET Jean-Louis Clinique ophtalmologique
BONNET-EYMARD Joseph Pathologie médicale
BONNIER Etienne Electrochimie Electrométallurgie
BOUCHERLE André Chimie et Toxicologie
BOUCHEZ Robert Physique nucléaire
BRAVARD Yves Géographie
BRISSONNEAU Pierre Physique du Solide
BUYLE-BODIN Maurice Electronique
CABANAC Jean Pathologie chirurgicale
CABANEL Guy Clinique rhumatologique et hydrologique
CALAS François Anatomie
CARRAZ Gilbert Biologie animale et pharmacodynamie
CAU Gabriel Médecine légale et Toxicologie
CAUQUIS Georges Chimie organique
CHABAUTY Claude Mathématiques pures
CHATEAU Robert Thérapeutique
CHENE Marcel Chimie papetière
COEUR André Pharmacie chimique
CONTAMIN Robert Clinique gynécologique
COUDERC Pierre Anatomie Pathologique
CRAYA Antoine Mécanique
Mme DEBELMAS Anne-Marie Matière médicale
MM. DEBELMAS Jacques Géologie générale
DEGRANGE Charles Zoologie
DESSAUX Georges Physiologie animale
DODU Jacques Mécanique appliquée
DREYFUS Bernard Thermodynamique
DUCROS Pierre Cristallographie
DUGOIS Pierre Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie

FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
FELICI Noël	Electrostatique
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GALLISSOT François	Mathématiques pures
GALVANI Octave	Mathématiques pures
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GERBER Robert	Mathématiques pures
GIRAUD Pierre	Géologie
KLEIN Joseph	Mathématiques pures
Mme KOFLER Lucie	Botanique et physiologie végétale
MM. KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
LACAZE Albert	Thermodynamique
LACHARME Jean	Biologie végétale
LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
LEDRU Jean	Clinique médicale B
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOUP Jean	Géographie
Mlle LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM. MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
MALINAS Yves	Clinique obstétricale
MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
MASSEPORT Jean	Géographie
MAZARE Yves	Clinique médicale A
MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
MOURIQUAND Claude	Histologie
MOUSSA André	Chimie nucléaire
NEEL Louis	Physique du Solide
OZENDA Paul	Botanique
PAUTHENET René	Electrotechnique
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRET René	Servomécanismes
PILLET Emile	Physique industrielle
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
REULOS René	Physique industrielle
RINALDI Renaud	Physique
ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
SANTON Lucien	Mécanique
SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
SENGEL Philippe	Zoologie
SILBERT Robert	Mécanique des fluides
SOUTIF Michel	Physique générale
TANCHE Maurice	Physiologie
TRAYNARD Philippe	Chimie générale
VAILLAND François	Zoologie
VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme VERAIN Alice	Pharmacie galénique
VERAIN André	Physique
Mme VEYRET Germaine	Géographie
MM. VEYRET Paul	Géographie
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	AUBERT Guy	Physique
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARRA Jean	Mathématiques appliquées
	BEAUDOING André	Pédiatrie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBEQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
M.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie

BEGUIN Claude	Chimie organique
BELORIZKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM. BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM. BOUCHET Yves	Anatomie
BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
BRIERE Georges	Physique expérimentale
BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
BRUGEL Lucien	Energétique
BUISSON Roger	Physique
BUTEL Jean	Orthopédie
CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
CHIBON Pierre	Biologie animale
COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
COLOMB Maurice	Biochimie médicale
CONTE René	Physique
CROUZET Guy	Radiologie
DURAND Francis	Métallurgie
DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM. FAURE Jacques	Médecine légale
GAVEND Michel	Pharmacologie
GENSAC Pierre	Botanique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIDON Maurice	Géologie
GRIFFITHS Michael	Mathématiques appliquées
GROULADE Joseph	Biochimie médicale
HOLLARD Daniel	Hématologie
HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
IDELMAN Simon	Physiologie animale
IVANES Marcel	Electricité
JALBERT Pierre	Histologie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
JULLIEN Pierre	Mathématiques pures
KAHANE André	Physique générale
KUHN Gérard	Physique
Mme LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM. LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LANCIA Roland	Physique atomique
LE JUNTER Noël	Electronique
LEROY Philippe	Mathématiques
LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
LONGUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
LUU DUC Cuong	Chimie organique
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
MARECHAL Jean	Mécanique
MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
MAYNARD Roger	Physique du Solide
NICOUD Max	Maladies infectieuses
MOREAU René	Hydraulique (INP)

NEGRE Robert
PARAMELLE Bernard
PECCOUD François
PEFFEN René
PELMONT Jean
PERRET Jean
PERRIN Louis
PFISTER Jean-Claude
PHELIP Xavier
Mle PIERY Yvette
RACHAIL Michel
RACINET Claude
RICHARD Lucien
Mme RINAUDO Marguerite
MM. ROMIER Guy
ROUGEMONT (DE) Jacques
STIEGLITZ Paul
STOEBNER Pierre
VAN CUTSEM Bernard
VEILLON Gérard
VIALON Pierre
VOOG Robert
VROUSSOS Constantin
ZADWORNY François

Mécanique
Pneumologie
Analyse (IUT B)
Métallurgie
Physiologie animale
Neurologie
Pathologie expérimentale
Physique du Solide
Rhumatologie
Biologie animale
Médecine interne
Gynécologie et obstétrique
Botanique
Chimie macromoléculaire
Mathématiques (IUT B)
Neuro-chirurgie
Anesthésiologie
Anatomie pathologique
Mathématiques appliquées
Mathématiques appliquées (INP)
Géologie
Médecine interne
Radiologie
Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. BOUDOURIS Georges
CHEEKE John
GOLDSCHMIDT Hubert
YACOUD Mahmoud

Radioélectricité
Thermodynamique
Mathématiques
Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme BERIEL Hélène
Mme RENAUDET Jacqueline

Physiologie
Microbiologie

Que Monsieur le Professeur N. GASTINEL accepte ma plus profonde gratitude pour avoir bien voulu diriger cette thèse. Ses éminents conseils et ses encouragements ont été pour moi un soutien très précieux.

Que Monsieur F. ROBERT, Maître de Conférences à l'Université Scientifique et Médicale de Lyon, reçoive mes plus sincères remerciements pour les quelques corrections qu'il a apportées à mon travail, ainsi que pour sa présence en ce jury.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur le Professeur P.J. LAURENT qui a bien voulu prendre place au sein de ce même jury.

Je n'oublie pas non plus l'aide de Mesdames CARRE-PIERRAT et NEUMANN dans l'exécution de la frappe dans les délais les plus courts, de même que le service de tirage, tous ayant contribué à l'élaboration de cette thèse dans les conditions les meilleures.

- TABLE DES MATIERES -

◦ INTRODUCTION

PREMIERE PARTIE

CLASSE DE NORMES DE VECTEUR SUR \mathbb{R}^n GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES DE BANACH.

1 - Définitions et notations	1
2 - Relations fonctionnelles entre une norme ψ d'un espace de Banach E et une norme φ de \mathbb{R}^n générée par φ	2
3 - Interprétation géométrique	4
4 - Propriétés générales d'une norme Ψ de \mathbb{R}^n générée par la norme φ d'un espace de Banach	5

DEUXIEME PARTIE

CLASSE DE NORMES DE VECTEUR SUR \mathbb{R}^n GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES FONCTIONNELS USUELS DE BANACH.

CHAPITRE I

11

NORMES DE VECTEUR DANS \mathbb{R}^n GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES FONCTIONNELS DE BANACH $L^p(X, \mu)$.

1 - Les espaces fonctionnels $L^p(X, \mu)$. Définitions et propriétés générales	11
2 - Normes usuelles de \mathbb{R}^n générées par la norme de l'espace $L^1(X, \mu)$	15
3 - Normes usuelles de \mathbb{R}^n générées par les normes des espaces $L^p(X, \mu)$ $1 < p < +\infty$	21
4 - Etude du cas où $p = 2$. Espace de Hilbert $L^2(X, \mu)$	24
5 - Normes usuelles de \mathbb{R}^n générées par la norme de l'espace $L^\infty(X, \mu)$	27
6 - Problème	35

- CHAPITRE II -

NORMES DE VECTEUR SUR \mathbb{R}^n GÉNÉRÉES PAR LES NORMES DES ESPACES DES
FONCTIONS CONTINUES SUR UN ESPACE MÉTRIQUE COMPACT.

1 - Espaces $C(K, F)$ des fonctions continues sur un espace métrique à compact K et à valeurs dans un espace de Banach F . Définitions et propriétés générales	43
2 - Cas général : F est un espace de Banach quelconque	43
2.1 - Caractérisation des (f_i) de $C(K, F)$ définissant la norme de h_1 de \mathbb{R}^n	44
2.2 - Problème d'existence de tels (f_i) dans $C(K, F)$	46
2.3 - Caractérisation des (f_i) de $C(K, F)$ définissant la norme h_∞ de \mathbb{R}^n	48
2.4 - Problème d'existence de tels (f_i) dans l'espace $C(K, F)$	50
3 - Cas où F est un espace de Banach dont la norme est strictement convexe.	51
4 - Cas où la norme de l'espace F génère une norme φ de \mathbb{R}^n	54
5 - Cas où F est un espace de Hilbert	55
6 - Cas où l'espace de Banach F est la droite réelle \mathbb{R}	57
6.1 - Caractérisation des éléments (f_i) de $C(K, \mathbb{R})$ définissant la norme h_1 de \mathbb{R}^n	57
6.2 - Caractérisation des éléments (f_i) de $C(K, \mathbb{R})$ définissant la norme h_∞ de \mathbb{R}^n	58
6.3 - Problème d'existence de tels (f_i) dans $C(K, \mathbb{R})$	62
7 - Certaines propriétés particulières concernant la norme de la convergence uniforme de l'espace $C(K, \mathbb{R})$	64
7.1 - Caractérisation des éléments (f_i) de l'espace $C(K, \mathbb{R})$ définissant la norme h_p de \mathbb{R}^n ($1 < p < +\infty$)	66
7.2 - Problème d'existence de tels (f_i) dans $C(K, \mathbb{R})$	67
7.3 - Généralisation des résultats de 7.1 et 7.2	69
8 - Universalité de l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$	72

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

CHAPITRE III

76

NORMES DE VECTEUR SUR \mathbb{R}^n GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES DES APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES D'UN ESPACE NORME DANS UN ESPACE DE BANACH.

1 - Espaces $L(F,G)$ des applications linéaires continues d'un espace normé F dans un espace de Banach G . Définitions et propriétés générales	76
2 - Cas où la norme de G génère une norme φ de \mathbb{R}^n	77
3 - Cas où G est un espace de Hilbert	78
4 - Cas où $F = L^p(X,\mu)$ et $G = \mathbb{R}$	79
5 - Cas où F est un espace de Hilbert et $G = \mathbb{R}$	80

CHAPITRE IV

NORMES DE VECTEUR DANS \mathbb{R}^n GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES DE HILBERT.

1 - Espaces de Hilbert. Définitions et propriétés générales	82
2 - Caractérisation de la classe des normes sur \mathbb{R}^n générées par la norme hilbertienne	83
3 - Norme duale d'une norme de \mathbb{R}^n générée par la norme d'un espace de Hilbert	86
4 - Problème	88

CHAPITRE V

NORMES DE VECTEUR DANS \mathbb{R}^n GENEREES PAR LA NORME DE L'ESPACE DE BANACH DES FONCTIONS NUMERIQUES A VARIATION BORNEE SUR L'INTERVALLE $[a,b]$ de \mathbb{R} .

1 - Définitions et notations	90
2 - Propriétés algébriques des fonctions numériques à variation bornée sur $[a,b]$. Structure algébrique de $BV[a,b]$	90
3 - Propriétés topologiques des fonctions numériques à variation bornée sur $[a,b]$. Structure topologique de $BV[a,b]$	91
4 - Classe de normes de \mathbb{R}^n générées par la norme de l'espace quotient $BV[a,b]/\sim$	94

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

CHAPITRE VI

ETUDE DE LA CLASSE DE NORMES DUALES DES NORMES DANS \mathbb{R}^n GENEREES PAR
LES NORMES DES ESPACES DE BANACH. CARACTERISATION DES ESPACES DE HILBERT.

1 - Position du problème	99
2 - Propriétés générales de la norme duale d'une norme générée par la norme d'un espace de Banach E	101
2.1 - Cas où la dimension de E est finie et égale à n	101
2.2 - Cas où la dimension de E est infinie	101
2.3 - Cas où E est un espace de Hilbert	102
3 - Caractérisation des espaces de Hilbert	104

CHAPITRE VII

NORMES DE MATRICES GENEREES PAR LES NORMES DES ESPACES DE BANACH.

1 - Définitions. Notations. Propriétés générales	110
2 - Cas de normes des matrices carrées. Normes sous-multiplicatives	110
3 - Caractérisation des éléments (f_{ij}) définissant les normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_{(n, n)}(\mathbb{R})$	112
3.1 - Cas des espaces fonctionnels $L^p(X, \mu)$	113
3.2 - Cas des espaces des fonctions continues sur un compact $C(K, F)$	114

Applications

RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE DU PROBLEME DU LIEU DES MEILLEURS APPROXIMANTS LINEAIRES DANS UN SOUS ESPACE DE DIMENSION FINIE D'UN ESPACE DE BANACH.

I - Approximation linéaire dans un sous-espace de dimension finie d'un espace de Banach.....	116
1 - Définitions. Notations	116
2 - Caractérisation du meilleur approximant de f dans V_n	117
3 - Interprétation du meilleur approximant de f dans V_n à l'aide de la norme sur \mathbb{R}^n générée par la norme de l'espace E	118
4 - Etude de la partie $K_{(f_i, f)}$	120
II - Problème inverse du lieu des meilleurs approximants linéaires dans un sous-espace de dimension finie d'un espace de Banach	122
1 - Problème	122
2 - Cas où la partie compacte convexe K se réduit à un point	123
3 - Cas où la partie compacte convexe K est symétrique par rapport à l'origine 0 et admettant 0 comme point interne	124
4 - Généralisation du cas 3.....	130
5 - Cas où la partie compacte convexe K est le translaté de la boule unité d'une norme ϕ de \mathbb{R}^n	133
6 - Cas où la partie compacte convexe K est symétrique par rapport à l'un de ses points	136
7 - Cas général où la partie compacte convexe K de \mathbb{R}^n est non vide et quelconque. Résolution du problème inverse des meilleurs approximants linéaires	144
8 - Application : Caractérisation des parties compactes convexes de \mathbb{R}^n	149

III - Exemples simples de construction de n éléments $(f_i)_{i=1-n}$, de l'espace

$C([a,b],\mathbb{R})$ définissant une norme Ψ de \mathbb{R}^n