

N° d'ordre :

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

*André BOUCHET*

## ETUDE COMBINATOIRE DES ORDONNES FINIS APPLICATIONS

Thèse soutenue le 13 Mai 1971 devant la Commission d'Examen :

Monsieur J. KUNTZMANN Président

Messieurs KOSZUL Examineurs

BENZAKEN

NIVAT

## TABLE DES MATIERES

### RAPPELS

	pages
<u>1 - Propriétés élémentaires des fermetures .....</u>	5
A) Définition	
B) Caractérisation d'une fermeture par ses invariants	
C) Invariants d'une fermeture sur un treillis complet	
D) $U$ - Homomorphisme complet	
E) Théorème du point fixe	
<u>2 - Sections d'un ensemble préordonné - Treillis distributifs .....</u>	8
A) Relation de préordre	
B) Définition d'une section	
C) Treillis distributif	
D) Treillis de sections	
E) Sections principales	
F) Somme d'éléments $U$ -irréductibles d'un treillis distributif fini	
<u>3 - Fonctions booléennes et recouvrements d'un ensemble fini .....</u>	11
A) Treillis de Boole	
B) Autres expressions d'un treillis de Boole	
C) Cubes d'un treillis de Boole	
D) Fonctions booléennes	
E) Ensemble caractéristique d'une fonction booléenne simple	
F) Fonction booléenne caractéristique d'un recouvrement partiel	
G) Monôme booléens	
H) Ecriture SP d'une fonction booléenne simple	
I) Fonctions booléennes croissantes	
J) Recouvrements partiels libres d'un ensemble - Correspondance avec les fonctions booléennes croissantes	

1ère partie : REPRESENTATION DES ORDONNES FINIS

---

<u>Chapitre I :</u>	Pages
<u>Systèmes générateurs d'un ensemble ordonné - Application de la notion de fermeture</u> .....	18
1 - Définitions relatives à l'engendrement .....	20
2 - Systèmes $\cup$ générateurs ( $\cap$ générateurs) d'un ensemble ordonné	22
3 - Systèmes $\cup$ et $\cap$ générateurs d'un ordonné .....	23
 <u>Chapitre II :</u>	
<u><math>\cap</math> Codage d'un treillis fini dans un treillis distributif fini</u> .....	29
1 - Prémersion - Précodage - Extension d'un précodage .....	30
2 - Conditions nécessaires d'existence d'un $\cap$ codage .....	30
3 - Extension d'un précodage dans un treillis distributif fini ...	35
4 - Réciproque du théorème 1 dans le cas où $\mathcal{E}'$ est distributif ....	37
5 - Correspondance bijective entre précodages et $\cap$ codages minimaux	38
6 - $\cap$ codage dans un produit de chaînes - Généralités .....	39
7 - $\cap$ codage dans $2^n$ .....	40
8 - $\cap$ codage dans $n^k$ ( $n > 1$ ) .....	41
9 - $\cap$ codage dans $N^n$ .....	42
 <u>Chapitre III</u>	
<u>Codage d'un ensemble ordonné dans un produit de chaînes</u> .....	44
1 - Engendrement d'un treillis de sections' .....	46
2 - Condition nécessaire et suffisante pour qu'un préordre soit une intersection de préordres donnés .....	51
3 - Condition nécessaire et suffisante pour qu'un ordonné s'immerge dans une puissance cartésienne de chaînes $n^k$ .....	53
4 - Décomposition d'un ordre en ordres totaux - Dimension .....	55
5 - Algorithmes d'immersion - Exemple .....	56
A) Recherche des éléments $\cup$ irréductibles ( $\cap$ irréductibles)	
B) Détermination des couples $(i, u)$ utiles	
C) Recherche des systèmes générateurs minimaux	
D) Immersion minimale dans $2^k, N^k$ , décomposition en ordres totaux	

2ème partie : REPRESENTATION DES RELATIONS BINAIRES

---

<u>Chapitre I :</u>	Pages
<u>Génération d'une relation binaire</u> .....	64
1 - Définitions générales relatives aux relations binaires .....	66
2 - Homomorphismes de relations binaires .....	67
A) Applications décomposables	
B) Homomorphismes	
C) Congruences	
D) Relations binaires atomiques	
E) Relations binaires semblables	
3 - Etude comparée des relations binaires et des relations n-aires	70
A) Définition générale d'une relation n-aire	
B) Définition d'un homomorphisme	
C) Sous-relations	
4 - Correspondances de Galois associées à une relation binaire ....	72
5 - Sous-ensembles générateurs gauches (droits) d'une relation ...	75
6 - Interprétation des systèmes générateurs dans le cas des relations d'ordre .....	75
7 - Eléments irréductibles d'une relation binaire .....	77
8 - Propriété caractéristique d'un sous-ensemble générateur gauche (resp. droit) .....	78
9 - Pavé générateur - Sous-relation génératrice .....	79
10 - Remarque sur les algorithmes de recherche des pavés maximaux .	82
 <u>Chapitre II :</u>	
<u>Homomorphisme d'une relation binaire dans un treillis complet</u> .....	84
1 - Sous relations contractées - Propriétés générales .....	86
2 - Homomorphisme contracté d'une relation binaire dans un treillis complet .....	87
3 - Extensions d'une sous-relation contractée .....	90
4 - Bissection contractée d'une relation d'ordre .....	94
5 - Immersion canonique d'une relation binaire dans un treillis complet .....	96
6 - Eléments caractéristiques d'une relation binaire (resp. relation d'ordre fini) .....	97

<u>Chapitre III :</u>	Pages
<u>Relations en escaliers</u> .....	101
1 - Chaînes de pavés .....	102
A) Définitions	
B) Type d'une chaîne complète	
2 - Définition d'un escalier .....	104
A) Propriétés fondamentales d'un escalier	
B) Type d'un escalier	
C) Autres propriétés d'un escalier	
3 - Pavés pleins maximaux du complémentaire d'un escalier défini par un homomorphisme contracté .....	110
4 - Pavés pleins maximaux du complémentaire d'un escalier défini par une chaîne complète - Numérotation canonique .....	113
A) Numérotations minimales d'un escalier défini par sa chaîne de pavés pleins maximaux	
B) Numérotation canonique d'un escalier défini par sa chaîne de pavés pleins maximaux	
C) Complémentation d'un escalier	
D) Variation du nombre de marches d'un escalier par passage au complémentaire	
E) Numérotation canonique du complémentaire d'un escalier	

Chapitre IV

<u>Codage d'une relation binaire dans un produit de chaînes</u> .....	121
1 - Homomorphismes d'une relation binaire dans un produit cartésien de relations binaires .....	123
A) Image réciproque d'une relation binaire par une application décomposable	
B) Produit cartésien d'une famille de relations binaires	
C) Intersection (union) d'une famille de relation binaires ayant même support.	
D) Caractérisation d'un homomorphisme dans un produit cartésien de relations	

	Pages
2 - Dimension d'une relation binaire .....	125
A) Dimension d'une relation d'ordre	
B) Propriétés de la dimension	
C) Dimensions comparées d'une relation et d'une sous-relation	
3 - Caractérisation d'un homomorphisme contracté dans un produit cartésien de relations d'ordre .....	127
4 - Etude des homomorphismes contractés dans un produit de chaînes	129
5 - Algorithmes de recherche d'un homomorphisme d'une relation binaire dans un produit de chaînes .....	130
6 - Codage d'une relation d'ordre .....	134

3ème partie : REPRESENTATION DES FAMILLES DE MOORE  
ETUDE ANALYTIQUE DES FERMETURES SUR UN TREILLIS  
DE BOOLE

1 - Prêordre régulier sur un treillis complet .....	139
2 - Fonction caractéristique d'une famille de Moore .....	142
3 - Traduction en algèbre de Boole de certaines propriétés vérifiées par une application $F : B^n \rightarrow B^n$ .....	143
4 - Monômes réguliers d'une fermeture duale .....	148
A) Propriétés générales de monômes réguliers	
B) Caractérisation d'une fermeture duale	
C) Application - Génération des fermetures duales	
D) Caractérisation des monômes réguliers d'une fermeture duale	
5 - Caractérisation des monômes premiers d'une fermeture .....	153
6 - Prêordre régulier attaché à un recouvrement .....	155
A) Propriétés du prêordre régulier attaché à un recouvrement	
B) Exemple - Bases premières complètes d'une fonction booléenne simple	
C) Correspondances de Galois associées à un recouvrement partiel	
7 - Interprétation du prêordre régulier attaché à un recouvrement .....	160
8 - Recherche d'un recouvrement associé à un prêordre régulier donné (1ère méthode) .....	160
9 - Existence d'un recouvrement attaché à un prêordre régulier donné (2ème méthode) .....	162
10 - Limite inductive d'une application monotone et extensive (resp. contractante) .....	163
11 - Génération des familles de parties d'un ensemble .....	171
A) Introduction	
B) Décomposition d'une famille de parties	
C) Famille de caractère fini	
D) Expression booléenne de la famille engendrée par une relation normale	
E) Décomposition d'une fonction booléenne	
F) Recherche des décompositions d'une famille de parties d'un ensemble fini	

12 - Etude des familles de Moore de caractère fini .....	179
A) Génération d'un préordre régulier	
B) Caractérisation des préordres réguliers de caractère fini	
C) Caractérisation des préordres réguliers d'indice fini	
D) Seconde méthode d'étude des préordres réguliers de caractère fini	
E) Applications	

4ème partie : SYSTEMES SEQUENTIELS

---

	Pages
<u>Chapitre I :</u>	
<u>Réduction des systèmes séquentiels partiellement déterminés</u> .....	187
1 - Introduction - Problèmes posés par la synthèse des systèmes séquentiels .....	187
A) Systèmes séquentiels et circuits séquentiels	
B) Séquences d'entrée - sortie d'un système séquentiel	
C) Synthèse d'un circuit séquentiel - Spécification des séquences d'entrée-sortie	
D) Problème de la réduction	
2 - Surhomomorphisme d'un système séquentiel partiellement déterminé	191
A) Surhomomorphisme d'un système séquentiel incomplet (rappel)	
B) Surhomomorphisme d'un système séquentiel partiellement déterminé	
C) Traduction en termes de relation des propriétés caractéristiques d'un surhomomorphisme	
D) Liaison entre surhomomorphisme et précision	
3 - Recouvrement compatible d'un système séquentiel partiellement déterminé .....	195
4 - Propriétés algébriques des recouvrements compatibles - Algorithme de calcul .....	198
A) Propriétés algébriques élémentaires	
B) Génération des recouvrements partiels libres compatibles	
C) Algorithme de calcul des classes maximales de compatibilité	
5 - Interprétation de l'algorithme de recherche des classes maximales de compatibilité .....	204
6 - Principe général de la méthode de réduction d'un système séquentiel partiellement déterminé .....	205
7 - Recouvrements partiels impliqués par une classe de compatibilité	208
8 - Calcul d'un système $\cup$ générateur des recouvrements compatibles .	211

	Pages
9 - Règles permettant d'accélérer le calcul d'un recouvrement compatible de coût minimal .....	214
10 - Conclusions - Remarques relatives à certains programmes linéaires en nombres entiers .....	218

Chapitre II :

Etude du comportement global d'un système séquentiel

1 - Systèmes séquentiels de classe D - Graphes étiquetés .....	221
A) Définition des systèmes séquentiels de classe D	
B) Graphe de détermination d'un système séquentiel partiellement déterminé	
C) Caractérisation de la meilleure précision globale pour les systèmes séquentiels de classe D	
D) Problèmes liés à l'étude du comportement global	
2 - Etude comparée des graphes étiquetés et des automates finis ..	227
A) Définition fonctionnelle d'un graphe étiqueté	
B) Application régulière associée à un graphe étiqueté	
C) Complétion d'un graphe étiqueté déterministe	
D) Etude de l'équivalence ponctuelle	
E) Relation de dominance - Composantes fortement connexes - Sous-graphes - Sous-graphes fermés	
3 - Composantes fermées de deux graphes étiquetés déterministes globalement équivalents .....	231
A) Développement d'un graphe étiqueté	
B) Composantes fortement connexes du développé d'un graphe étiqueté déterministe	
C) Sous-graphe nécessaire d'un graphe étiqueté déterministe réduit	
D) Etats inutiles d'un graphe étiqueté déterministe réduit	
E) Cas des graphes déterministes non réduits	
4 - Configurations d'un graphe étiqueté déterministe .....	241
A) Définitions	
B) Interprétation graphique des configurations	
C) Liaison entre le comportement global d'un graphe étiqueté déterministe et l'ensemble de ses configurations	

	<i>Pages</i>
5 - Décomposition d'un graphe étiqueté .....	247
A) Composantes connexes - Somme cardinale	
B) Sous-graphes partiels	
C) Classes de flèches fortement connexes	
D) Définition des décompositions d'un graphe étiqueté	
E) Configurations extraites d'une chaîne	
6 - Reconnaissance des relations séquentielles .....	253
A) Degrés d'un sommet d'une quasi-machine séquentielle	
B) Caractérisation des quasi-machines séquentielles qui représentent une relation séquentielle	
C) Relations séquentielles complètes.	