

# THESE



*présentée à*

**Université Scientifique et Médicale de Grenoble**  
**Institut National Polytechnique de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*  
**DOCTEUR DE 3ème CYCLE**  
Mathématiques appliquées  
option: analyse numérique

par

**ROCHE Jean Rodolphe**



# APPLICATION DES APPROXIMANTS DE PADE AU CALCUL DE L'EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE.



Thèse soutenue le 20 juin 1980 devant la commission d'examen

Madame F. CHATELIN Président

Messieurs N. GASTINEL  
A.Y. BARRAUD      Examinateurs  
C. BREZINSKI

## TABLE DES MATIERES

### Introduction

1

### Chapitre 1

#### FONCTIONS MATRICIELLES. EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE

|   |    |
|---|----|
| 1. Fonction de matrice associée à une fonction analytique.....              | 3  |
| 2. Détermination de la fonction d'une matrice par la formule de Cauchy..... | 6  |
| 3. Forme de Souriau de la résolvante d'une matrice.....                     | 8  |
| 4. La fonction exponentielle d'une matrice.....                             | 9  |
| 5. Propriétés de l'exponentielle d'une matrice.....                         | 9  |
| 6. Norme de l'exponentielle d'une matrice.....                              | 11 |
| 7. "Sensibilité" du problème.....   | 15 |

### Chapitre 2

#### APPROXIMANTS DE PADE DE L'EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE

|  |    |
|--|----|
| 1. Rappel sur les approximants de Padé. Définition.....                  | 25 |
| 2. Approximants de Padé de la Fonction exponentielle.....                | 26 |
| 3. Convergence. Une borne d'erreur théorique dans le cas "scalaire"..... | 28 |
| 4. Calcul de l'erreur sur les dérivées.....                              | 30 |
| 5. "A-acceptabilité" des approximants de Padé de l'exponentielle...      | 31 |
| 6. Approximants de Padé de l'exponentielle d'une matrice.....            | 34 |
| 7. "A-acceptabilité" dans le cas matriciel.....                          | 37 |

### Chapitre 3

#### USAGE PRATIQUE DE LA METHODE DE PADE POUR LE CALCUL DE L'EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE

|   |    |
|---|----|
| 1. Méthode de Ward.....   | 38 |
| 2. Méthode par transformation du spectre.....   | 43 |
| 3. Borne de l'erreur d'arrondi commise quand on calcule l'exponentielle d'une matrice par la méthode de Padé..... | 48 |
| 4. Exemple.....   | 55 |

### Chapitre 4

#### METHODE POUR CALCULER L'EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE QUI UTILISE UN ALGORITHME DE BLOC DIAGONALISATION

|   |    |
|---|----|
| 1. Introduction.....  | 72 |
| 2. Méthode pour bloc diagonaliser une matrice A.....  | 73 |
| 3. Algorithme pour calculer l'exponentielle d'une matrice qui utilise le programme de Stewart et Bavey.....               | 75 |
| 4. Commentaire sur le choix de R.....   | 77 |
| 5. Exemple de l'application de la méthode de bloc diagonalisation suivie de la méthode par transformation du spectre..... | 84 |

## Chapitre 5

### DEVELOPPEMENT EN SERIE DE POLYNOMES DE TCHEBICHEFF

|  |     |
|--|-----|
| 1. Introduction.....   | 93  |
| 2. Application au calcul de l'exponentielle.....                 | 94  |
| 3. Calcul de $p_n(A)$ . Méthode de Clenshaw.....                 | 96  |
| 4. Erreur d'arrondi dans la méthode de Clenshaw matricielle..... | 97  |
| 5. Exemples numériques.....                                      | 100 |
| 6. Tables de coefficients.....                                   | 106 |

## Chapitre 6

### UNE METHODE POUR CALCULER LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS EXACTES OBTENUS PAR UN ALGORITHME QUI CALCULE L'EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE

|   |     |
|---|-----|
| 1. Introduction.....  | 111 |
| 2. Notation.....  | 111 |
| 3. Erreur de calcul.....  | 111 |
| 4. Erreur sur les coefficients.....                                   | 112 |
| 5. Estimation statistique de l'erreur.....                            | 113 |
| 6. Méthode de permutation.....  | 114 |
| 7. Méthode de permutation-perturbation.....                           | 114 |
| 8. Evaluation de la moyenne $\bar{e}_{ij}$ de l'erreur $e_{ij}$ ..... | 115 |
| 9. Calcul du nombre de chiffres significatifs exacts du résultat....  | 116 |
| 10: Exemples de l'application pratique de la méthode de Vignes.....   | 117 |
| 11. Conclusion.....   | 121 |

## Conclusion

## Bibliographie

122  
124