

TU 464³⁶

présentée à

pour obtenir

par

CHARLES-FRANCOIS DUCATEAU

.....

ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES D'INTERPOLATION

Thèse soutenue le 12 mars 1971, devant la commission d'examen :

MM. J. KUNTZMANN *Président*

N. GASTINEL

J. CEA *Examineurs*

P. J. LAURENT

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

TABLE DES MATIERES DETAILLEE

CHAPITRE - I

<u>PROCEDE GENERAL D'INTERPOLATION - RAPPELS SUR LES FONCTIONS CONVEXES</u>	
<u>FONCTIONS HILBERTIENNES ET FONCTIONS SEMI-HILBERTIENNES -----</u>	
	1
I -	<u>Procédé général d'interpolation -----</u>
	2
	<i>On définit la notion de procédé général d'interpolation, on introduit diverses conditions permettant de définir plusieurs types de procédé d'interpolation.</i>
II -	<u>Rappel sur la théorie des fonctions convexes -----</u>
	10
	<i>Nous faisons un bref rappel des notions et résultats les plus importants de la théorie des fonctions convexes. On explicite, en particulier, des conditions de caractérisation d'un minimum d'une somme de deux fonctions convexes et les propriétés des fonctions jauges.</i>
III -	<u>Fonctions hilbertiennes -----</u>
	19
	<i>On définit les fonctions hilbertiennes et leurs rapports avec les sous-espaces hilbertiens ; les propriétés de leurs fonctions polaires et des sous-différentiels.</i>
IV -	<u>Fonctions semi-hilbertiennes -----</u>
	28
	<i>On Définit ces fonctions, on étudie leurs propriétés, et on introduit la notion de multinoyaux.</i>

CHAPITRE - II

APPLICATIONS DES FONCTIONS SEMI-HILBERTIENNES A L'ANALYSE NUMERIQUE

32

- I - Utilisation des fonctions semi-hilbertiennes pour l'étude des fonctions spline générales ----- 33
- On explicite le problème général de fonctions spline en termes de fonction semi-hilbertienne h . On obtient une multiapplication que doit vérifier la fonction spline et par polarité on caractérise la fonction spline comme appartenant à l'image de certains éléments de E' par le multinoau de h . On précise ces résultats dans le cas de la fonction spline d'interpolation minimisant $\int_a^b (u^{(k)}(t))^2 dt$.*
- II - Procédé d'interpolation obtenu par la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne (fonction spline) ----- 42
- On étudie les propriétés de ce procédé d'interpolation. En particulier le rôle de la condition de Haar sur $\text{Ker}h$.*
- III - Exemples de caractérisation de fonctions spline généralisées ----- 53
- On examine les fonctions spline d'Hermite, par moyenne pondérée et par condition sur la transformée de Fourier.*
- IV - Etude du cas où $\text{Ker}h$ ne vérifie pas la condition de Haar et où $\text{Ker}H \neq 0$ ----- 58
- Nous donnons des exemples de phénomènes se produisant dans ces deux cas.*
- V - Utilisation des fonctions semi-hilbertiennes pour des splines à plusieurs variables ----- 64
- On étudie en particulier les fonctions spline définies par une relation d'égalité sur un sous-ensemble de Ω .*
- VI - Recherche de formules optimales d'approximation de fonctionnelles linéaires ----- 71
- Par l'utilisation des fonctions semi-hilbertiennes on retrouve l'exactitude des formules optimales sur les fonctions spline : on donne une condition suffisante de meilleure approximation lorsqu'on fait dépendre d'un paramètre les éléments d'une base de l'espace des approximants.*

VII -	<u>Conditions pour qu'un procédé d'interpolation provienne de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne</u> -----	84
VIII -	<u>Exemple de procédé provenant de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne</u> -----	89

CHAPITRE - III

	<u>PRODUIT TENSORIEL DE FONCTIONS SEMI-HILBERTIENNES ET APPLICATIONS A L'INTERPOLATION A PLUSIEURS VARIABLES</u> -----	101
I -	<u>Produit tensoriel de formes bilinéaires et de fonctions semi-hilbertiennes</u> ----- <i>On définit ces notions, on étudie certaines de leurs propriétés, en particulier sur le noyau d'un produit tensoriel de fonctions semi-hilbertiennes.</i>	102
II -	<u>Produit tensoriel de fonctions spline</u> ----- <i>On étudie les propriétés de minimisation, relative à un produit tensoriel, de ces fonctions spline.</i>	110
III -	<u>Fonctions spline interpolants sur les côtés d'un maillage</u> ----- <i>Ici on a un problème vérifiant une infinité de condition d'interpolation. On décrit la fonction minimisant un produit tensoriel de fonction semi-hilbertienne.</i>	118
IV -	<u>Fonctions spline à valeurs vectorielles</u> ----- <i>On considère des fonctions à valeurs dans un espace de Hilbert, et on déduit l'existence de fonctions spline par projections sur une base orthonormale.</i>	124
V -	<u>Surfaces de Coons</u> ----- <i>On décrit la méthode d'interpolation de surfaces par des surfaces de Coons, et on montre le rapport avec des fonctions spline à valeurs vectorielles.</i>	127

CHAPITRE - IV

INTERPOLATION SUR UN NOMBRE INFINI DE POINTS ET EXTRAPOLATION A LA LIMITE PAR DES FONCTIONS SPLINE -----

137

- I - Polaires d'ensembles convexes définis par des jauges et expression de la continuité d'une application linéaire --- 138
- II - Etude de l'image d'un convexe par une application linéaire 141
On donne une application des résultats obtenus pour un procédé d'interpolation linéaire. On donne aussi un critère de résolution d'un système infini d'équations.
- III - Condition pour l'interpolation sur un nombre infini de points par des fonctions spline ----- 150
On donne cette condition d'une façon générale, puis on l'explique pour le cas de la fonction semi-hilbertienne $\int_a^b (u(t))^2 dt$. On obtient aussi un résultat de convergence des splines construites sur un nombre fini de ces points.
- IV - Extrapolation à la limite par des fonctions spline ----- 163
On décrit deux algorithmes pour le calcul de l'extrapolé et on donne des résultats numériques.

CHAPITRE - V

INTERPOLATION ET CONVERGENCE DE CHAMPS DE TAYLOR -----

175 bis

- I - Notations définitions et rappels sur les champs de Taylor et le théorème de Whitney ----- 175 bis
- II - Procédé d'interpolation de type Hermite ----- 179
On introduit sur ce type de procédé des conditions de régularité et de continuité.

III -	<u>Prolongement d'un champ de Taylor d'ordre k par une fonction de $C^k[a,b]$-----</u>	187
	<i>En utilisant un procédé décrit en V.II on définit un Φ-Ψ prolongement et on montre qu'il appartient à $C^k[a,b]$.</i>	
IV -	<u>Convergence de champs de Taylor d'ordre k définis sur un même ensemble $F \subset [a,b]$-----</u>	191
	<i>On définit cette notion et on donne une condition qui assure la convergence des prolongements définis en V.III</i>	
V -	<u>Notion de convergence sur des champs de Taylor non nécessairement définis sur un même ensemble et limite des Φ-Ψ prolongements associés -----</u>	203
VI -	<u>Etude et utilisation du cas où les procédés Φ (interpolation) et Ψ (extrapolation) sont donnés par des polynômes -----</u>	211

CHAPITRE - VI

	<u>PROCEDE D'INTERPOLATION PAR UNE FONCTION DE CLASSE C^k -----</u>	226
I -	<u>Notations et conditions sur une fonction définie sur un sous-ensemble d'un intervalle $[a,b]$.-----</u>	227
	<i>On introduit deux types de conditions I_k et W_k.</i>	
II -	<u>Théorème de Whitney indiquant une condition pour qu'une fonction f définie sur un sous-ensemble de $[a,b]$ soit prolongeable par une fonction $C^k[a,b]$-----</u>	234
	<i>On décrit aussi les Q-projections utilisés par Whitney pour démontrer ce théorème.</i>	

III -	<u>Procédé général associant un champ de Taylor à une fonction f définie sur F prolongeable en une fonction $C^k[a,b]$ et notions de convergence pour ces fonctions.</u> -----	243
IV -	<u>Procédé basé sur les Q-projections pour construire un prolongement de f qui appartienne à $C^k[a,b]$.</u> ----- <i>On donne aussi des résultats de convergence de ces prolongements.</i>	249
V -	<u>Essais numériques d'un procédé d'interpolation basé sur les Q-projections</u> -----	256