e 1492

thèse

présentée à

université scientifique et médicale
institut national polytechnique
de grenoble

pour obtenir le grade de
docteur ès sciences mathématiques

charles payan

sur quelques problèmes de couverture et de couplage en combinatoire

soutenue le 18 mars 1977 devant la commission d'examen

président j. kuntzmann

examinateurs c. benzaken
a. bouchet
m. las vergnas
r. perret
m. sakarovitch

INTRODUCTION

CHAPITRE I RAPPELS - UN PROBLEME DE COUVERTURE

1. Rappels 1.1.
   1.1. Couverture
   1.2. Couplage
   1.3. Hypergraphe
   1.4. Graphe=Multigraphe

2. Couverture des arêtes d'un graphe cubique par des couplages et des couplages forts. 1.6.

CHAPITRE II SUR LA NOTION D'ABSORPTION DANS LES GRAPHES ET HYPERGRAPHES

1. Nombre d'absorption d'un hypergraphe 2.1.
   1.1. Définitions
   1.2. Couvertures et absorbants
   1.3. Application au calcul de $\beta(H)$ et $\beta'(H)$

2. Application au cas des graphes. 2.4.
   2.1. Relations entre absorbants et couvertures
   2.2. Application
   2.3. Nombre d'absorption et carré d'un graphe

3. Quatre relations entre certains nombres de couverture et nombres de couplage dans l'étude des absorbants. 2.13.
   3.1. Définitions
   3.2. Quatre relations

4. Graphes β-parfaits 2.24.

5. Sur une conjecture de Vizing concernant le nombre d'absorption de la somme cartésienne de deux graphes. 2.26

5.1. Définition
5.2. Borne supérieure de $\beta(G+H)$
5.3. Borne inférieure de $\beta(G+H)$

6. Une inégalité du type Nordhaus. Gaddum ($\beta(G).\ \beta(G) \leq n(G)$) 2.29

7. Quelques bornes supérieures du nombre d'absorption 2.30

8. Quelques extensions de la notion d'absorption 2.47

CHAPITRE III ENSEMBLES CYCLIQUEMENT STABLES ET GRAPHES CUBIQUES

1. Ensembles cycliquement stables et absorbants transitifs dans les graphes réguliers. 3.2

2. Ensembles cycliquement stables et coarbres. 3.5

3. Borne supérieure de $\alpha_k(G)$ 3.5

4. Valeur de $\alpha_1(G)$ dans le cas des graphes représentatifs des arêtes de graphes cubiques. 3.6

5. Borne inférieure de $\alpha_1(G)$ pour les multigraphes cubiques. 3.8

6. Ensemble cycliquement stable et coloration acyclique. 3.19

7. Remarque. 3.19

CHAPITRE IV COUVERTURE PAR DES ENSEMBLES MINIMAUX

0. Enoncé de conjectures 4.1

1. Couverture des arêtes d'un graphe par des couvertures minimales partielles
P - Couplages 4.8

2. Couverture des arêtes d'un graphe par des couvertures minimales 4.10

3. Couverture par des transversaux minimaux partiels
Couplage de stables maximaux partiels 4.15

4. Couverture par des transversaux minimaux 4.17

4.1. Propriétés générales.
4.2. Cas des "line-graphs"
4.3. Cas des graphes complémentaires de "line-graphs"
4.4. Cas des graphes de degré maximum inférieur ou égal à 3.
4.5. Cas des graphes sans sous-graphes isomorphes à $K_{1,3}$
4.6. Cas des graphes de degré élevé.
4.7. Problèmes.

5. Couplages maximaux deux à deux disjoints 4.58

5.1. Graphes réguliers
5.2. Graphes polytopaux.

CHAPITRE V SUR UNE CLASSE DE COUPLES D'HYPERGRAPHES

1. Introduction 5.1

1.1. Définition
1.2. Une classe de couples d'hypergraphes

2. Formulation du problème en termes de Théorie des Graphes 5.2

2.1. Réduction au cas uniforme
2.2. Graphe associé G.

3. Calcul du nombre de stabilité de G 5.4

3.1. Partition de G en stables
3.2. Une famille de cliques de G.
3.3. Détermination de $\alpha(G)$

4. Caractérisation des (h,k) couples de cardinal maximal 5.6

5. Applications 5.8

5.1. Couverture supérieure d'un hypergraphe par un autre
5.2. Couverture inférieure minimale d'un hypergraphe par un autre.
5.3. Hypergraphe τ critique (conjecture d'ERDOS et GALLAI)
5.4. Remarque.

CHAPITRE VI. SEQUENCES PSEUDO-EULERIENNES UNIVERSELLES
(Un problème combinatoire rencontré lors de l'étude du test des systèmes logiques).

0. Introduction 6.1

1. Test universel non adaptatif 6.4

1.1. Séquences (n,m) identifiantes
1.2. Identification non adaptative par comparaison des sorties.

2. Pseudo-test universel non adaptatif 6.9

2.1. Définitions
2.2. Propriétés
2.3. Bornes de la longueur d'un pseudo test.
2.4. Construction de séquences particulières (n,m) visiteurs et (n,m) promeneurs.
2.5. Calcul de la puissance d'un langage.

3. Conclusion 6.36

ANNEXE I. DEMONSTRATION DE $\beta(G).\ \beta(\bar{G}) \leq n$

ANNEXE II ENSEMBLES CYCLIQUEMENT STABLES DANS LES GRAPHES CUBIQUES CYCLIQUEMENT QUATRE ARETES CONNEXES.

1. Nombre de stabilité cyclique des graphes cubiques cycliquement quatre arêtes connexes.

2. Une propriété de la famille des ensembles cycliquement stables

ANNEXE III TYPE ET GRAPHE DES DISTANCES D'UNE FONCTION BOOLEENNE

BIBLIOGRAPHIE