

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Jean - François MAITRE

Docteur de 3ème cycle

**SUR CERTAINES NORMES ET
FONCTIONNELLES DANS LES ESPACES
DE MATRICES ET D'OPERATEURS.**

Thèse soutenue le 30 novembre 1974 devant la commission d'examen

JURY
Monsieur F.L. BAUER
Monsieur N. GASTINEL
Monsieur J.L. JOLY
Monsieur P.J. LAURENT
Monsieur F. ROBERT

M. MICHEL SOUTIF
M. GABRIEL CAU

Présidents M. Louis NEEL
Vice-Présidents MM. Lucien BONNETAIN
Jean BENOIT

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'USMG

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. ANGLES D'AURIAC	Mécanique des fluides
ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
ARNAUD Paul	Chimie
AUBERT Guy	Physique
AYANT Yves	Physique approfondie
Mme BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM. BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
BARBIER Reynold	Géologie appliquée
BARJON Robert	Physique nucléaire
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
BARRA Jean-René	Statistiques
BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
BEAUDOING André	Pédiatrie
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme BERTRANDIAS Fraçoise	Mathématiques Pures
MM. BEZES Henri	Chirurgie générale
BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
BONNET Georges	Electrotechnique
BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
BRAVARD Yves	Géographie
CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
CALAS François	Anatomie
CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
CHARACHON Robert	Oto- Rhino- Laryngologie
CHATEAU Robert	Thérapeutique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
CRAYA Antoine	Mécanique
Mme DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM. DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Métallurgie
DESSAUX Georges	Physiologie animale
DODU Jacques	Mécanique appliquée
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DREYFUS Bernard	Thermodynamique
DUCROS Pierre	Cristallographie
DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphilligraphie
FAU René	Clinique neuro-psychiatrique

MM. GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GALLISSOT François	Mathématiques Pures
GALVANI Octave	Mathématiques Pures
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GAVEND Michel	Pharmacologie
GEINDRE Michel	Electroradiologie
GERBER Robert	Mathématiques Pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
KAHANE André	Physique générale
KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
LACAZE Albert	Thermodynamique
LACHARME Jean	Biologie végétale
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LATREILLE René	Chirurgie générale
LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
LEDRU Jean	Clinique médicale B
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
LOUP Jean	Géographie
Mlle LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
MALINAS Yves	Clinique obstétricale
MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
MAZARE Yves	Clinique médicale A
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
MOURIQUAND Claude	Histologie
MOUSSA André	Chimie nucléaire
NEEL Louis	Physique du solide
OZENDA Paul	Botanique
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
REULOS René	Physique industrielle
RINALDI Renaud	Physique
ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
SENGEL Philippe	Zoologie
SOUTIF Michel	Physique générale
TANCHE Maurice	Physiologie
TRAYNARD Philippe	Chimie générale
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN jacques	Physique nucléaire
VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme VERAÏN Alice	Pharmacie galénique
MM. VERAÏN André	Physique
VEYRET Paul	Géographie
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. ASCARELLI Gianni	Physique
CHEEKE John	Thermodynamique
GILLESPIE John	I.S.N.
ROCKAFELLAR Ralph	Mathématiques Appliquées
WOHLFARTH Erich	Physique du solide

MM.	COHEN-ADDAD Jean Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DUSSAUD René	Mathématique (OUS)
Mme	ETEPRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FONTAINE Jean Marc	Mathématiques Pures
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROS Yves	Physique (stag.)
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	GUITTON Jacques	Chimie
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	KRAKOWIAK Sacha	Mathématique Appliquées
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean Marie	Physique nucléaire
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
Mme	MINIER Colette	Physique
MM.	MICOUD Max	Maladie infectieuses
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAYNAUD Hervé	MI.A.G.
	RENAUD Maurice	Chimie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
M.	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean Claude	Chimie Générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VOUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	CRABBEE Pierre	C.E.R.M.O.
	CABOT	Mathématiques Appliquées
	CURRIE Jan	Mathématiques Appliquées

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculai:
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	DENIS Bernard	Cardiologie
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie

"MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'I.N.P.G."PROFESSEURS TITULAIRES

MM. BENOIT Jean	Radioélectricité
BESSON Jean	Electrochimie
BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
BONNIER Etienne	Electrochimie, Electrometallurgie
BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
COUMES André	Radioélectricité
FELICI Noël	Electrostatique
PAUTHENET René	Physique du solide
PERRET René	Servomécanismes
SANTON Lucien	Mécanique
SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
----------------------	------------------

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BLIMAN Samuel	Electronique
BLOCH Daniel	Physique du solide et cristallographie
COHEN Joseph	Electrotechnique
DURAND François	Metallurgie
MOREAU René	Mécanique
POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. BOUVARD Maurice	Génie mécanique
CHARTIER Germain	Electronique
FOULARD Claude	Automatique
GUYOT Pierre	Chimie minérale
JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
LACOUME Jean Louis	Géophysique
LANCIA Roland	Physique atomique
LESPINARD Georges	Mécanique
MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
ROBERT François	Analyse numérique
SABONNADIÈRE Jean Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M. LANDAU Ioan Doré	Automatique
---------------------	-------------

CHARGE DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

M. ANCEAU François	Mathématiques appliquées
--------------------	--------------------------

Messieurs les Professeurs BAUER et GASTINEL ont inspiré, par leurs travaux, mon intérêt pour les problèmes étudiés dans cette thèse. Aussi est-ce un honneur et une joie pour moi de les voir réunis dans ce Jury.

Monsieur le Professeur BAUER a bien voulu venir spécialement de Munich à Grenoble malgré ses multiples occupations. Ma dette envers lui en est encore élargie, et je lui exprime ici ma respectueuse gratitude pour tout ce qu'il a fait pour moi.

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur GASTINEL, grâce à qui cette thèse a pu être menée à son terme. Sans l'appui de ses conseils et de ses encouragements répétés, le dernier obstacle aurait été bien difficile à franchir.

Je remercie très sincèrement Monsieur le Professeur LAURENT, et Monsieur JOLY, Maître de Conférences à Bordeaux, d'avoir accepté de faire partie du Jury.

Que Monsieur ROBERT trouve ici un témoignage de ma reconnaissance, pour les moments enrichissants passés à Lyon sur des tâches communes, et pour le souci qu'il a toujours eu de voir mon travail aboutir.

Je tiens à remercier aussi les personnes qui m'ont aidé dans la réalisation matérielle de cette thèse, notamment Madame HEVENQ, qui a assuré la frappe avec soin, célérité et gentillesse.

Enfin, qu'il me soit permis de remercier Monsieur COMPARAT, Directeur de l'Ecole Centrale de Lyon, pour ce qu'il a fait pour moi depuis mon arrivée à Ecully, ainsi que tous les membres du Laboratoire de Mathématiques et Informatique avec qui j'ai le plaisir de travailler actuellement.

Mon amicale reconnaissance va aussi à tous ceux avec qui j'ai travaillé à Besançon, Munich et Grenoble, et particulièrement à Monsieur NGUYEN HUU VINH qui a été mon premier équipier de recherche, et avec qui ont été élaborés les premiers résultats sur les valeurs singulières.

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

T A B L E D E S M A T I E R E S

INTRODUCTION.

PREMIERE PARTIE.

CHAPITRE 1. PROPRIETES FONDAMENTALES DES NORMES DE MATRICES.

1.1. Quelques notations et rappels sur les normes.	2
1.1.1. Définitions de base.	2
1.1.2. Jauges et normes absolues.	3
1.1.3. Norme duale et jauge duale.	4
1.1.4. Le groupe des isométries relatif à une norme.	6
1.1.5. Un exemple : les normes de Hölder.	6
1.2. Espaces normés de matrices.	8
1.2.1. Notations.	8
1.2.2. Normes et dualité sur $\mathcal{M}(m,n)$	8
1.2.3. Normes d'applications.	9
1.2.4. Les c-normes.	11
1.3. Normes sur l'algèbre $\mathcal{M}(n)$	15
1.3.1. Normes multiplicatives.	15
1.3.2. Normes multiplicatives critiques.	16
1.3.3. Minimalité des normes S_ϕ dans \mathcal{N}	17
1.3.4. Propriétés particulières des normes multiplicatives unit.	18
1.4. Les normes de von Neumann.	21

CHAPITRE 2. LES C-NORMES SUR L'ESPACE $\mathcal{M}(m,n)$.

2.1. Les deux c-normes de base sur (ψ, ϕ^*)	24
2.1.1. La plus grande c-norme $\psi \otimes \phi^*$	24
2.1.2. Propriétés géométriques des boules.	27
2.1.3. Décompositions optimales relatives à $\psi \otimes \phi^*$ et cas d'égalité.	28
2.1.4. Uniformité de $S_{\psi\phi}$ et $\psi \otimes \phi^*$	32

2.2. Normes ψ -uniformes ou ϕ -uniformes.	33
2.2.1. Propriétés fondamentales.	33
2.2.2. Normes uniformes et c-normes.	36
2.3. C-normes sur l'algèbre $\mathcal{M}(n)$	42
2.3.1. Multiplicativité des normes uniformes.	42
2.3.2. Multiplicativité des c-normes.	43
2.3.3. Caractérisation des c-normes multiplicatives critiques. ..	46
2.3.4. Décompositions optimales relatives à $\phi \otimes \phi^*$	50
2.3.5. Une propriété géométrique de la boule-unité.	54
2.3.6. Application du Théorème d'Auerbach à la comparaison des normes $S_{\psi\phi}$ et $\psi \otimes \phi^*$	56

CHAPITRE 3. NORMES DE MATRICES CONSTRUITES A PARTIR D'AUTRES NORMES.

3.1. Normes sur $\mathcal{M}(m,n)$ obtenues par composition d'autres normes. ...	60
3.1.1. Introduction.	60
3.1.2. Propriétés des normes $[\cdot]_{\theta(\psi_1, \dots, \psi_n)}$	61
3.1.3. Les c-normes composées $[\cdot]_{\theta(\psi)}$	63
3.1.4. Norme composée par plusieurs normes sur $\mathcal{M}(n)$	69
3.2. Normes associées.	72
3.2.1. Introduction. Définitions.	72
3.2.2. Propriétés des normes $G_{\psi\phi}$	73
3.2.3. Calcul de $G_{\psi\phi}$ pour $\Psi \in \Gamma(\psi_1, \psi_2^*)$ et $\Phi \in \Gamma(\phi_1, \phi_2^*)$	75
3.2.4. Les normes de type $G_{\psi\phi}$ sur $\mathcal{M}(n)$	79
3.3. Normes quotients.	82
3.3.1. Introduction. Définitions.	82
3.3.2. Propriétés générales de Φ_X	83
3.3.3. Etude de Φ_X pour X dans C^n	85
3.3.4. Propriétés de $\Phi_X(y)$ comme fonction de x.	88
3.3.5. Expression de Φ_X à l'aide de pseudo-inverses de X.	93
3.3.6. Majorations de Φ_X	97
3.3.7. Notion de norme de rang p sur $\mathcal{M}(m,n)$	98

CHAPITRE 4. VALEURS SINGULIERES GENERALISEES ET DISTANCE A CERTAINS ENSEMBLES
D'APPLICATIONS.

4.1. Introduction.	106
4.1.1. Quelques relations de dualité.	106
4.1.2. Distance à l'ensemble des applications de noyau donné : formules générales.	108

4.1.3. Propriétés de la distance δ_r .	110
4.1.4. Cas de normes composées générales.	112
4.1.5. Normes de von Neumann.Valeurs singulières.	115
4.1.6. Propriétés de mini-max et maxi-min.	118
4.2. Valeurs singulières généralisées.	119
4.2.1. Définitions et propriétés fondamentales.	119
4.2.2. Cas particuliers ; exemples.	124
4.2.3. Inégalités du type de celles de Weyl.	127
4.2.4. Propriétés d'invariance.	134
4.2.5. Valeurs singulières généralisées et valeurs propres.	137
4.3. Valeurs singulières et distance à l'ensemble des applications de rang inférieur ou égal à r.	140
4.3.1. Cas général ; minoration des distances.	140
4.3.2. Encadrement des distances dans l'espace $\mathcal{L}(E,F)$.	142
4.3.3. Cas des normes de rang 1.	149
4.4. Liens entre fonctionnelles de A, A^*, \tilde{A} .	152
4.4.1. Introduction.	152
4.4.2. Expression des α_k par dualité.	154
4.4.3. Expression en termes de largeur d'ordre k.	155
4.4.4. Comparaison des valeurs singulières de A et A^* .	159
4.4.5. Conorme et valeurs singulières.	161
4.4.6. Comparaison des valeurs singulières de A et \tilde{A} .	165
4.5. Cas des opérateurs compacts.	171

CHAPITRE 5. SOLUTIONS ACCEPTABLES ET SOLUTIONS GENERALISEES D'UN PROBLEME.

5.1. Introduction et définitions.	174
5.2. Etude et caractérisation de certains sous-espaces d'applications.	176
5.2.1. Définitions et notations.	176
5.2.2. Semi-norme $\ \cdot\ _x$: propriétés simples et exemples.	177
5.2.3. Caractérisation de certains sous-espaces d'applications d'un espace normé dans un autre.	180
5.2.4. Résultats complémentaires et remarques.	185
5.3. Expression des critères d'acceptabilité.	189
5.3.1. Remarques générales.	189
5.3.2. Problèmes et perturbations linéaires.	191
5.3.3. Problèmes de valeurs propres.	196

5.4. Solution généralisée d'un problème linéaire.200
5.4.1. Résultats généraux.200
5.4.2. Solutions généralisées dans le cas hilbertien.203
5.4.3. Exemple : approximation dans un espace de Hilbert.208

BIBLIOGRAPHIE (première partie).211

DEUXIEME PARTIE.

CHAPITRE 6. SUR L'EQUIVALENCE ENTRE SEMI-NORMES ET OSCILLATIONS.

6-0. Introduction.218
6-I; Remarques préliminaires.221
6-II. Quelques propriétés des espaces vectoriels ordonnés.223
6-III. Oscillation relative à un vecteur.228
6-IV. Correspondance entre semi-normes et oscillations.234

CHAPITRE 7. SEPARATION DES VALEURS PROPRES DE MATRICES POSITIVES ET GENERALISATION.

7-I. Introduction.244
7-II. Rappel des principales bornes et des méthodes utilisées. ...245
7-III. Une nouvelle borne.248
7-IV. Comparaison des différents résultats.250
7-V. Généralisation.253

BIBLIOGRAPHIE (deuxième partie). 259

BIBLIOTHEQUE DU CERIST