

THESE

présentée à

**Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble**

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE
Informatique

par

BALACHEFF Nicolas



**LES GRAPHS DE DEMONSTRATION :
OUTIL POUR L'ETUDE
DES DEMONSTRATIONS NATURELLES.**



Thèse soutenue le 22 mars 1978 devant la Commission d'Examen :

Président : B. VAUQUOIS

Examineurs : G. GLAESER

P. JULLIEN (Rapporteur)

J. KUNTZMANN

G. VERGNAUD

**LES GRAPHES DE DEMONSTRATION :
OUTIL POUR L'ETUDE
DES DEMONSTRATIONS NATURELLES.**

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

N. Balacheff

T A B L E D E S M A T I E R E S

INTRODUCTION

I	<u>Les objectifs</u>	1
II	<u>Les principales approches</u>	1
II-1	L'introspection.....	2
II-2	Les méthodes de type expérimental.....	3
II-2.1	Les travaux soviétiques.....	3
II-2.2	PIAGET et l'approche génétique.....	5
II-2.3	NEWELL et SIMON, et l'intelligence artificielle.....	6
III	<u>Notre analyse et ses conséquences</u>	8
III-1	Le choix d'un contexte.....	8
III-2	Précisions sur l'objet de notre étude.....	9
III-2.1	Etudier des résolutions de problèmes mathématiques.....	9
III-2.2	... par des personnes parvenues au stade hypothético-déductif...	13
III-2.3	... exprimées par un discours.....	13
IV	<u>Présentation d'un outil pour l'analyse de démonstrations naturelles</u>	14
IV-1	Logique formelle et raisonnement.....	14
IV-1.1	Le CP1, premier outil de comparaison des raisonnements.....	16
IV-1.2	Le CP1, modèle pour l'étude des raisonnements.....	18
IV-2	Graphes et raisonnements.....	20
IV-2.1	Les graphes, image de la structure d'un raisonnement.....	20
IV-2.2	Utilisation actuelle des graphes de démonstration.....	22
IV-2.3	Les graphes, outil pour l'analyse des raisonnements.....	28
	<u>LES GRANDES SECTIONS DE CET EXPOSE</u>	31
	<u>PARTIE A : GRAPHE D'UNE DEMONSTRATION FORMELLE</u>	
I	<u>Graphe de démonstration</u>	32

I-1	S-axiome.....	32
I-2	Règles de déduction.....	33
I-3	Démonstration relativement à une théorie.....	35
I-4	Commentaire sur cette définition.....	35
I-5	Remarque sur le vocabulaire.....	35
I-6	Démonstration minimale.....	36
I-6.1	Définitions.....	36
I-6.2	Suppression des redondances.....	36
I-6.3	Suppression des énoncés inutiles.....	36
I-6.4	Démonstration minimale.....	37
I-7	Représentation d'une démonstration minimale.....	37
I-8	Exemple de représentation.....	37
I-9	Rappel de définitions.....	39
I-10	Théorème 1 de représentation.....	39
II	<u>R-démonstration : définition et graphe de représentation.....</u>	40
II-1	Notation.....	41
II-2	Preuve minimale.....	41
II-3	Représentation d'une preuve minimale, cas 2.....	41
II-4	Procédure de preuve $\rightarrow i$	42
II-5	Procédure de preuve par l'absurde.....	42
II-6	Procédure de preuve $\forall i$	42
II-7	Remarque (généralisation).....	43
II-8	Représentation.....	43
II-9	Remarque (hypothèse).....	43
II-10	Procédure de preuve par cas.....	43
II-10.1	Définition.....	43
II-10.2	Représentation.....	43
II-11	Procédure de preuve $\exists e$	44
II-11.1	Définition.....	44
II-11.2	Représentation.....	44

II-12	R-démonstration : définition.....	44
II-12.1	Remarque.....	46
II-12.2	Commentaire sur la définition.....	46
II-12.3	Niveau d'une R-démonstration.....	46
II-12.4	Propriété 1.....	47
II-12.5	Propriété 2.....	48
II-12.6	Exemple de R-démonstration.....	48
II-13	R-démonstration : représentation.....	51
II-13.1	Remarque et vocabulaire.....	51
II-13.2	Lemme.....	51
II-13.3	Théorème 2 de représentation.....	55
II-13.4	Exemple de représentation d'une R-démonstration.....	57
<u>PARTIE B : DE LA REDACTION AU GRAPHE DE REPRESENTATION</u>		
0-1	Remarque.....	63
I	<u>Les avertisseurs</u>	64
I-1	Les avertisseurs d'inférence.....	64
I-1.1	Les avertisseurs d'inférence ascendants.....	64
I-1.2	Les avertisseurs d'inférence descendants.....	64
I-1.3	Remarque.....	67
I-1.4	Avertisseur d'inférence liant plusieurs énoncés.....	67
I-1.5	Problèmes liés aux relations transitives.....	69
I-1.5.1	Cas général.....	69
I-1.5.2	Cas de l'égalité.....	72
I-1.5.3	Quelques situations et leur règlement.....	73
I-1.6	Donc, premier mot d'une rédaction.....	75
I-1.7	Le retour à la ligne.....	75
I-1.8	Si ... on a ..., Si ... alors	78
I-1.9	Si ... alors ... sinon.....	80

I-2	Les avertisseurs de rattachement.....	83
I-3	Les avertisseurs de traduction.....	84
I-4	Les avertisseurs de construction.....	85
I-5	Enchâssement d'un avertisseur.....	87
II	<u>Les énoncés</u>	87
II-1	Les énoncés méta-mathématiques.....	88
II-1.1	Les indicateurs de démonstration.....	88
II-1.2	Les arguments de procédure.....	90
II-1.2.1	Ceux qui évacuent une démonstration.....	90
II-1.2.2	Ceux qui rappellent une procédure.....	90
II-1.3	Les énoncés introduits par un verbe indiquant une action.....	92
II-1.4	Expression conditionnelle.....	92
II-1.5	Les phrases interrogatives.....	93
II-1.6	Quelques remarques supplémentaires.....	94
II-1.6.1	Présence de mots méta-mathématiques dans un énoncé mathématique.....	94
II-1.6.2	Indications pour la lecture, et confidences.....	95
II-2	Les énoncés mathématiques.....	95
II-2.1	Traduction des phrases contenant les connecteurs ET, OU.....	96
II-2.2	L'avertisseur d'inférence descendant et l'implication logique...	97
III-2.3	Le symbole \Leftrightarrow	97
II-2.4	La traduction des mots par des symboles.....	98
III	<u>De la rédaction à sa représentation par un graphe</u>	99
III-1	La suppression des énoncés méta-mathématiques.....	99
III-2	La traduction dans le langage des prédicats.....	100
III-2.1	La traduction des énoncés.....	100
III-2.2	Portée des quantificateurs et désignations.....	101
III-2.2.1	Comment la question se pose.....	101
III-2.2.2	Structure de la rédaction.....	103

III-2.2.3	Remarque sur le repérage des blocs.....	106
III-2.2.4	Réponse à la question.....	106
III-2.3	La traduction de la démonstration.....	108
III-2.3.1	Phase 1 : traduction des énoncés et règlement des conflits de désignation.....	108
III-2.3.2	Phase 2 : suppression de certains quantificateurs.....	111
III-3	Association d'un graphe à une rédaction.....	113
IV	<u>Discussion sur l'éventualité d'un traitement informatique.....</u>	117
<u>PARTIE C : APPLICATION A L'ETUDE DES RESOLUTIONS D'UN PROBLEME D'ALGEBRE</u>		
0-1	Avertissement.....	120
0-2	Le problème.....	120
0-3	L'échantillon.....	120
0-4	Les conditions de l'observation.....	121
0-5	Le traitement des observations.....	121
0-6	Les principaux paragraphes de cette étude.....	121
I	<u>Le réel</u>	122
I-1	Traduction des rédactions, le champ de résolution.....	122
I-2	Première analyse des contenus.....	123
I-2.1	... notée multiplicativement.....	123
I-2.2	Essai de classification des stratégies.....	125
I-3	Structure des résolutions : étude des graphes de représentation.....	127
I-3.1	Circuits et cercles vicieux.....	128
I-3.1.1	Test de la présence d'un circuit dans un graphe.....	128
I-3.1.2	Application.....	128
I-3.1.3	Propriété.....	128
I-3.2	Connexité et déductions explicites.....	130
I-3.2.1	Test de la connexité d'un graphe.....	130
I-3.2.2	Application.....	130
I-3.2.3	Propriété.....	134

I-3.3	Sources et puits du graphe de représentation.....	134
I-3.4	Rédaction ayant la structure d'une R-démonstration.....	136
I-3.5	Dimensions d'une démonstration.....	137
I-4	Ressemblance de deux démonstrations et classement.....	138
I-4.1	Indice de ressemblance.....	138
I-4.2	Exemple et homogénéité d'un échantillon.....	139
I-4.3	Classification des démonstrations.....	141
I-4.3.1	Classification pour l'échantillon DEUG.....	141
I-4.3.2	Classification pour l'échantillon LICENCE.....	143
II	<u>Le structuralement possible</u>	146
II-1	Champ de référence.....	147
II-2	Quelques commentaires.....	153
III	<u>Le matériellement possible</u>	156
III-1	Comparaison des champs de résolution et du champ de référence...	156
III-2	Confrontation du réel et du structuralement possible.....	158
III-2.1	Echantillon DEUG.....	158
III-2.2	Echantillon LICENCE.....	161
III-2.3	Les démonstrations par l'absurde.....	167
IV	<u>Conclusion</u>	169
	<u>CONCLUSION</u>	172
	<u>ANNEXES</u>	
	<u>Annexe 1</u>	174
	<u>Annexe 2</u>	175
	<u>INDEX</u>	185
	<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	186