

THESE DE DOCTORAT

présentée

A L'UNIVERSITE PARIS 7

Spécialité : Informatique Fondamentale

par

Hugo HERBELIN

Sujet de la thèse :

Séquents qu'on calcule

**De l'interprétation du calcul des séquents comme calcul
de λ -termes et comme calcul de stratégies gagnantes**

Soutenue le 23 Janvier 1995 devant la Commission d'examen composée de

MM. **Gérard HUET**
Stefano BERARDI
René DAVID
Michel PARIGOT
Thierry COQUAND
Serge GRIGORIEFF

Président
Rapporteurs

Directeur
Examinateur

Table des matières

Introduction	5
1 Calcul des séquents et élimination des coupures	9
1.1 Les calculs LJ et LK de Gentzen	10
1.1.1 Formules	10
1.1.2 Séquents	10
1.1.3 Règles d'inférences	10
1.1.4 Preuves	11
1.1.5 Caractérisation des calculs LJ et LK	12
1.1.6 Le théorème d'élimination des coupures	12
1.1.7 Variantes de LJ et LK	12
1.1.8 Remarques sur la définition de séquents	14
1.1.9 Intégration des règles structurelles aux autres règles	15
1.2 Elimination des coupures	15
1.2.1 Procédures d'élimination des coupures	16
1.2.2 Ordres d'évaluation	16
1.3 Elimination des coupures en logique classique	17
1.3.1 La preuve d'admissibilité de Martin-Löf	17
1.3.2 L'étape principale de réduction	20
1.3.3 Sur le non-déterminisme et la confluence	22
1.3.4 Un panorama des procédures existantes	23
2 LJT et le $\bar{\lambda}$-calcul	27
2.1 Correspondance entre les preuves sans coupures de LJ et les λ -termes simplement typés normaux	28
2.2 Vers le calcul LJT	29
2.3 Le plongement de LJ dans LJT	31
2.4 Le $\bar{\lambda}$ -calcul	31
2.4.1 Les expressions du $\bar{\lambda}$ -calcul	31
2.4.2 Formes normales du $\bar{\lambda}$ -calcul	32
2.4.3 Règles de réduction du $\bar{\lambda}$ -calcul	32
2.5 Le calcul LJT	33
2.5.1 Elimination des coupures	34
2.6 L'assignement des preuves de LJT par des $\bar{\lambda}$ -expressions	35
2.7 Termination forte de la réduction	37
2.8 Travaux connexes	39
3 LKT et le $\bar{\lambda}\mu$-calcul	41
3.1 Le $\bar{\lambda}\mu$ -calcul	42
3.2 Le calcul LKT	43
3.3 L'assignement des preuves de LKT par des $\bar{\lambda}\mu$ -expressions	46
3.4 Le plongement de LK dans LKT	47
3.5 Termination forte de la réduction en l'un et l'autre calculs	48

3.6	Le $\bar{\lambda}_C$ -calcul et le calcul LJT + $\neg\neg A \rightarrow A$	48
4	Autres extensions du $\bar{\lambda}$-calcul	51
4.1	Extension de LJT à la disjonction et du $\bar{\lambda}$ -calcul aux injections et à l'opérateur de choix	52
4.1.1	Le $\bar{\lambda}$ -calcul avec injections et opérateur de choix	52
4.1.2	Le calcul LJT avec \vee	53
4.1.3	L'assignement par des $\bar{\lambda}$ -expressions	53
4.2	Extension de LJT à la conjonction et du $\bar{\lambda}$ -calcul à la paire	53
4.2.1	Le $\bar{\lambda}$ -calcul avec constructeur de paire, projections et opérateur de décom-position de la paire	53
4.2.2	Le calcul LJT avec \wedge	54
4.2.3	L'assignement par des $\bar{\lambda}$ -expressions	54
4.3	Extension de la correspondance pour LJT avec quantificateurs	54
4.3.1	Le calcul LJT avec quantificateurs	55
4.3.2	Le $\bar{\lambda}$ -calcul correspondant	55
4.3.3	L'assignement par des $\bar{\lambda}$ -expressions	56
4.4	La correspondance pour le calcul classique des prédicats	56
4.5	L'isomorphisme pour le calcul classique avec indices de de Bruijn	56
4.5.1	Le $\bar{\lambda}\mu$ -calcul avec indices de de Bruijn	56
4.5.2	Le calcul LKT avec règles d'affaiblissement	58
4.5.3	Elimination des coupures	59
4.5.4	L'assignement des preuves de LKT par des $\bar{\lambda}\mu$ -expressions avec indices de de Bruijn	63
4.5.5	Terminaison forte	64
5	LJQ, LKQ et E-dialogues de Lorenzen	69
5.1	E-dialogues de Felscher	70
5.2	Correspondance entre preuves de LJQ et PE-stratégies gagnantes	73
5.2.1	Le calcul des séquents LJQ	73
5.2.2	La correspondance pour les formules sans disjonction	73
5.2.3	Le cas des formules avec disjonction	77
5.3	Le calcul LKQ* et les jeux non bien parenthésés	79
5.3.1	Les E-dialogues pour la logique classique	79
5.3.2	Le calcul des séquents LKQ*	79
5.3.3	Correspondance bijective entre stratégies gagnantes pour les E-dialogues classiques et les preuves de LKQ	80
5.4	Remarques	81
6	Débat et élimination faible de tête	83
6.1	Les règles infinitaires	84
6.1.1	L'utilisation implicite d'une règle infinitaire chez Gentzen	84
6.1.2	Le calcul de Novikoff	85
6.1.3	Règles infinitaires chez Lorenzen	85
6.1.4	Formules et boréliens	85
6.2	Une variante du calcul infintaire de Gentzen	85
6.2.1	Formules et séquents	85
6.2.2	Preuves	86
6.2.3	Notation des preuves par des termes	87
6.2.4	Preuves de Novikoff	88
6.2.5	Preuves partielles	88
6.3	Interprétation en terme de jeux	88
6.3.1	Parties	88
6.3.2	Stratégies	89
6.3.3	Equivalence entre stratégies gagnantes et preuves de Novikoff	90
6.3.4	Stratégies partielles	90

TABLE DES MATIÈRES	127
6.3.5 Débat	91
6.4 Elimination faible de tête des coupures	91
6.4.1 Réduction de tête élémentaire	91
6.4.2 Réduction de tête étendue	93
6.4.3 La réduction faible de tête	94
6.4.4 Terminaison de l'élimination faible de tête des coupures	94
6.5 L'équivalence	96
6.5.1 Preuves bien agencées	97
6.5.2 Conformité	99
Conclusion	103
Annexe	105
Elimination des coupures en calcul de Novikoff	105
Débat entre preuves vues comme stratégies gagnantes	111
Normalisation en $\bar{\lambda}$ -calcul	115