

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE
présentée par

Boucif ABDESSELAM

Pour obtenir

*Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY*

SUJET : Représentations des Algèbres et des Super-Algèbres pour les Racines de l'Unité,
Relations dans le Centre, Algèbres de Hecke, Symétries Orthogonales, Algèbres Non-linéaires

Soutenu le 12 Avril 1996 devant la Commission d'examen

MM. BECKERS Jules	
BINÉTRUY Pierre	Président
CHAKRABARTI Amitabha	
GAZEAU Jean-Pierre	
KIBLER Maurice	
MADORE Jean	Rapporteur
VAN DER JEUGT Joris	Rapporteur

Table des Matières

1	Introduction et Motivation	7
1	Groupes Quantiques	7
2	Représentations des Algèbres pour q une Racine de L'Unité	9
3	Représentations des Super-Algèbres pour q Racine de L'Unité	11
4	Algèbres de Hecke et Tableaux des Caractères	13
5	Représentations de $\mathcal{U}_q(SO(5))$, Déformation Nonminimale	14
6	Algèbres Non-linéaires et Algèbres \mathcal{W}	16
2	Algèbre de Hopf	19
1	Groupes et Algèbres	19
1.1	Généralités	19
1.2	Produits Tensoriels d'Algèbres	20
1.3	Algèbres Tensorielles, Symétriques et Anti-symétriques	25
2	Coalgèbres	26
3	Bialgèbre	30
4	Algèbre de Hopf	31
5	Algèbre de Lie	32
6	Modules	34
7	Représentations d'Algèbre	36
8	Quantification des Algèbres Enveloppantes	38
9	Équations de Yang-Baxter et Matrices \mathcal{R}	41
10	Base de l'Algèbre $\mathcal{U}_q(sl(N))$	44
10.1	Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt	44
10.2	Module de Verma de Plus Haut Poids	47
10.3	Représentations de $\mathcal{U}_q(\mathcal{G})$ pour q une Racine de l'Unité	47
3	L'algèbre Quantique $\mathcal{U}_q(sl(2))$	51
1	Algèbre de Hopf $\mathcal{U}_q(sl(2))$	51
2	Représentation de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ pour q Générique	52
3	Représentations de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ pour les q Racines de l'Unité	54
4	Relations dans le Centre de $\mathcal{U}_q(sl(2))$ pour q Racine de l'Unité	56

5	Formalisme de la Partie Fractionnaire	59
6	Ensemble Complet de Représentations de $\mathcal{U}_q(sl(2))$	63
4	Représentations de $\mathcal{U}_q(sl(N))$ pour q Racine de l'Unité	65
1	L'algèbre de Hopf $\mathcal{U}_q(sl(N))$	65
2	Module de Gelfand-Zetlin pour q Générique	66
3	Généralisation pour les Racines de l'Unité	68
3.1	Module de Gelfand-Zetlin Généralisé	68
3.2	Conditions sur les Parties Fractionnaires	69
3.3	Type \mathcal{B} : Représentations Périodiques	71
3.4	Type \mathcal{B} : Représentations Semi-périodiques	74
3.5	Type \mathcal{B} : Représentations Nilpotentes	75
3.6	Type \mathcal{A} : Représentations Nilpotentes	76
3.7	Type \mathcal{B} : Représentations Plates	76
3.8	Type \mathcal{B} : Représentations Atypiques	77
5	Représentations et Centre de $\mathcal{U}_q(sl(2 1))$	83
1	Super-Algèbres de Lie: Constructions et Exemples	83
2	Algèbre de Hopf $\mathcal{U}_q(sl(N 1))$	85
3	Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt	86
4	Classification des Représentations de $\mathcal{U}_q(sl(2 1))$	88
4.1	Type \mathcal{A} : Représentations Nilpotentes	90
4.2	Type \mathcal{B} : Représentations Nilpotentes	93
4.3	Type \mathcal{B} : Représentations Périodiques et Semi-Périodique	94
5	Ensemble Complet de Représentation et Centre	96
6	Algèbre de Hecke et Tableaux des Caractères	99
1	Groupe Symétrique S_N	99
2	Algèbre de Hecke $H_N(q)$ et la Représentation de Wenzel	105
3	Invariant Fondamental et Opérateur de Projection	106
4	Tableau des Caractères de $H_N(q)$	110
5	Un Nouvel Algorithme pour le Calcul des Caractères	114
5.1	Position du Problème	114
5.2	Opérateurs de Murphy	115
6	Correspondance entre les Invariants de $\mathcal{U}_q(sl(N))$ et $H_f(q^2)$	124
7	$\mathcal{U}_q(SO(5))$ et Déformation Non-minimale	129
1	Algèbre de Lie $SO(5)$ et Représentation	129
1.1	Représentation Irréductible de $SO(5)$	131
1.2	Contraction et Représentation du Groupe Euclidien $E(4)$	134
2	L'algèbre de Hopf $\mathcal{U}_q(SO(5))$	135
3	Représentations et Déformation Non-minimale	137

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	5
4 Représentation de $\mathcal{U}_q(E(4))$ et Implication Physique	141
8 Algèbre $sl(2)$ Non-linéaire	143
1 Déformation avec Variable Paragrassmannienne	143
2 Réalisation des Algèbres \mathcal{W} et Algèbre de Hopf	147
3 Algèbre Cubique: Réalisation et Représentation	150
9 Conclusions et Perspectives	153
Bibliographie	155

Titre: Représentations des algèbres et des super-algèbres pour les racines de l'unité, Relations dans le centre, Algèbre de Hecke, Symétries orthogonales, Algèbres Non-linéaires.

Résumé:

Cette thèse est consacrée à l'étude des groupes quantiques. Ces nouvelles structures apparaissent naturellement dans les modèles intégrables et dans les théories des champs conformes.

Dans partie I, nous introduisons le formalisme de la partie fractionnaire qui permet d'unifier la description des représentations irréductibles de dimension finie pour q générique, et pour q racine de l'unité. Nous démontrons que l'application de ce formalisme à la représentation de Gelfand-Zetlin de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(N))$ permet de décrire la totalité des représentations existantes. Dans la partie II, nous classifions les représentations irréductibles de dimension finie du groupe quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2|1))$. Nous discutons la notion d'ensemble complet de représentations pour établir les relations dans le centre de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2|1))$. Nous démontrons dans la partie III que les invariants fondamentaux de $H_N(q)$ et $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(N))$ caractérisent les représentations irréductibles de dimension finie (propriété de mémoire), et nous développons un nouvel algorithme pour extraire les caractères des représentations irréductibles de dimension finie de $H_N(q)$ basé sur cette propriété de l'invariant fondamental et sur la notion d'opérateur de Murphy. Nous discutons dans la partie IV la construction des représentations irréductibles de dimension finie du groupe quantique $\mathcal{U}_q(SO(5))$, et nous introduisons la notion de déformation non-minimale. Nous utilisons la propriété de mémoire du Casimir quadratique de $\mathcal{U}_q(SO(5))$ et la notion de contraction des représentations pour démontrer la dépendance du spin et la masse dans le groupe euclidien $\mathcal{U}_q(E(4))$ et le groupe de Poincaré quantique $\mathcal{U}_q(\mathcal{P}_4)$. Finalement dans la partie V, nous étudions la réalisation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2)$ non-linéaire en fonction des générateurs de $\mathfrak{sl}(2)$ habituels et les possibilités d'y définir une structure de Hopf. Nous classifions les représentations irréductibles de l'algèbre $\mathfrak{sl}(2)$ non-linéaire en deux types, la deuxième est spécifique à la déformation non-linéaire.