

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

CENTRE UNIVERSITAIRE AMAR TELIDJI- LAGHOUAT

Département de Tronc-Commun de S.E.T.I



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister.

En MATHEMATIQUES

***ANALYSE SPECTRALE D'UNE CERTAINE
CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS***

Préparé par :
-Melle **BENDAOU** Zohra

Devant le jury composé de Messieurs :

Nom et Prénom	Grade	Etablissement	Qualité
MOULAY Med Said	Prof	U.S.T.B.H Alger	Président
BELABBACI Youcef	M.C	C.U Laghouat	Rapporteur
KOUACHI Said	M.C	C.U Tebessa	Examineur
YOUKANA Amar	C.C	C.U Ourgla	Examineur
MOKHTARI Abdelkader	C.C	C.U Laghouat	Examineur

JUIN 2001

Résumé

Dans ce travail, on fait une analyse spectrale d'une classe d'opérateurs différentiels singuliers engendrés par des équations différentielles ordinaires singulières .

Dans le (**chapitre I**) : on a étudié l'équation de Legendre :

$$-(1-x^2)y'' + 2xy - \mu(\mu+1)y = q(x)y$$

dans $(-1,1)$ ensuite dans $(1,+\infty)$, l'équation de Bessel pour x dans $(0, \pi]$.Par la suite on a établi quelques relations fonctionnelles entre les fonctions hypergeometriques utilisées par la suite.

Dans les (**chapitres II et III**) : on considère des opérateurs singuliers, engendrés par l'équation de Legendre (sur un intervalle borné puis sur un intervalle non borné) .On a déterminé les opérateurs symétriques minimaux fermés, leurs indices de défaut puis construit des extensions auto-adjointes. On a étudié ensuite la nature du spectre, le noyau de la résolvante et la formule d'inversion.

Dans le (**chapitre IV**) ; on fait une étude similaire pour l'équation de Bessel sur un intervalle borné pour arriver au comportement asymptotique des valeurs propres.

Mots clés :

Opérateur symétrique minimal ; indices de défauts ; extension auto-adjointe ; Spectre ; comportement asymptotique.

Abstract:

This work deals with a spectral analysis of singular differential operators class generated by a differential equations

In **partI** we solved the equation of Legendre:

$$-(1-x^2)y'' + 2xy - \mu(\mu+1)y = q(x)y$$

in $(-1,1)$ and $(1, +\infty)$.Thus that the equation of Bessel for x in $(0, \pi]$.After that we establish some functional relations between hypergeometric functions.

In **Part II** and **III** ; we consider a singular operator, generated by the equation of Legendre ; on a limited interval and no limited interval to determine its closed minimal symmetrical operators, to determine its deficiency indices and its self-adjoint extension , the spectrum, kernel of the resolvent and the inversion formula .

In **Part IV** we make the same thing that in the previous chapters with another type of singular operator on a limited interval to finally arrive to eigenvalues behaviour asymptotic.

Key words :

Minimal symmetric operator, deficiency indices, spectrum, asymptotic comportment

المخلص

نقوم في هذا العمل بالتحليل الطيفي لمجموعة مؤثرات تفاضلية مفردة المولدة عن عبارة تفاضلية عادية .

في **الفصل I** نقوم بحل معادلات لوجوندر (Legendre) والتي عبارتها:

$$-(1-x^2)y'' + 2xy' - \mu(\mu+1)y = q(x)y$$

في المجال $(-1, 1)$ و μ في $(1, +\infty)$ كذلك معادلة باسل (Bessel) في المجال $(0, \pi]$ ثم تشكيل بعض العلاقات الوظيفية بين الدوال الفوق هندسية والتي نستعملها لاحقاً .

أما في **الفصل II-III** نعتبر المؤثر المفرد المولد من معادلة لوجوندر (Legendre) في مجال محدود ثم في مجال غير محدود . لتحديد المؤثر التناظري المغلق الأصغر ، تعيين دلائل النقص ثم إمداد ذاتي قرين (self-adjoint expression) دراسة طبيعة الطيف ونوات الحالة (Resolvent kernel) وقانون التعاكس (Inversion formula) .

في **الفصل الأخير** نقوم بنفس العمل لكن مع نوع آخر من المؤثرات الفردية في مجال محدود من أجل تحديد القيم التقاربية للقيم الذاتية،

(Asymptotic behaviour of eigenvalues)

Sommaire

Introduction

chapitre 0 :

Rappels et Démonstrations de quelques résultats.

chapitre I :

Equations différentielles hypergéométriques

I-1 Résolution de l'équation de Legendre sur $(-1, 1)$.

I-2 Quelques relations fonctionnelles entre les fonctions

hypergéométriques. Prolongement analytique et choix des solutions.

I-3 Résolution de l'équation de Legendre sur $(1, +\infty)$.

I-3.1. Prolongement analytique de $P_\mu(x)$

I-4. Equation de Bessel

I-4.1. résolution de l'équation de Bessel sur $(0, \pi]$.

I-4.2. Fonctions de Hankel et fonction de Bessel.

Chapitre II

Analyse spectrale d'un opérateur différentiel singulier sur un intervalle borné.

II-1 Opérateur symétrique minimal fermé engendré par une expression différentielle

II-2 Indices de défaut de L_0 .

II-3 Extension auto-adjointe L de L_0 .

II-4 Etude spectrale de L

II-4.1. Résolvante de L .

II-4.2. Nature du spectre.

II-4.3. Noyau de la résolvante ; formule d'inversion.

Chapitre III

Analyse spectrale d'un opérateur différentiel singulier sur un intervalle non borné.

III-1 Opérateur symétrique minimal fermé L_0 engendré par une expression différentielle .

III-2 Indices de défaut de L_0 .

III-3 Extensions auto-adjointes L de L_0 .

III-4 Spectre de L .

Chapitre IV

Analyse spectrale d'un autre, type d'opérateur différentiel singuliers sur un intervalle borné.

IV-1 Opération symétrique fermé minimal engendré par l'expression $\ell(y)$

IV-2 Indices de défaut.

IV-3 Etude de spectre.

IV.3.1. Nature du spectre

IV.3.2. Comportement asymptotique d'une solution.

IV.3.3 Comportement asymptotique des valeurs propres

Conclusion

Bibliographie

Annexes

A-1 Index des notations

A-2 Rappels