

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MED. KHIDER BISKRA
FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

présenté par

Saloua LABED

Pour l'Obtention du Grade de Magister en Mathématiques

Option

Analyse & Modèles Aléatoires

*Mesures Martingales et Application au
Contrôle Stochastique*

Devant Le Jury :

Abdelhakim NECIR	MC	Université de Biskra	Président
Brahim MEZERDI	PR	Université de Biskra	Rapporteur
Seid BAHLALI	DR MAC	Université de Biskra	Examineur

Soutenu le :.../.../2005

الخصم

ندرس في هذا العمل قضايا التحكم للمعادلات التفاضلية العشوائية. و في هذا السياق و بصفة خاصة ينصب هذا البحث على دراسة التقريب و الشروط اللازمة لوجود قيمة عظمى للقضية المدروسة.

في الفصل الأول نعطي تعريف و بعض الخصائص المتعلقة بتتابع عشوائية تأخذ قيمها في فضاء القياسات و كذا بعض النتائج التي تلزمنا لحل قضايا التحكم للمعادلات التفاضلية العشوائية.

الفصل الثاني يخص قضايا التقريب في التحكم العشوائي، حيث ندرس تقريب توابع عشوائية تأخذ قيمها في فضاء القياسات بالتتابع العشوائية لحركة براون.

في الفصل الثالث ندرس قضايا التحكم الضعيفة، بحيث نجد أن احتمال وجود قانون توزيع للتنائية المتكونة من المراقب (التحكم) و المسار يلزم وجود مراقبة مرخاة مثالية.

Abstract

In this work, we are interested in the necessary conditions of optimality in stochastic optimal control whose system is controlled by a martingale measure. These necessary conditions will be established with theorems of approximations.

In the first chapter, we were interested in certain definitions, properties and the construction of martingales measures and then we give results of extension of this problem.

In the second chapter, one considers theorems of approximation of martingales measures by stochastic integrals with respect to the Brownian motion and convergence within the meaning of L^2 between the initial and the relaxed problems.

In the final chapter, one defines the problem of relaxed stochastic controls, and the relation between the weak solutions of the stochastic differential equations and the martingales problems. Then one defines the control rules and then we prove an existence result.

Key words : Stochastic differential equation, martingale measure, stochastic control, relaxed control, control rule, optimal rule, martingale, Brownian motion.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons aux conditions nécessaires d'optimalité en contrôle optimal stochastique dont le système est dirigé par une mesure martingale. Ces conditions nécessaires seront établies avec des théorèmes d'approximations.

Au premier chapitre, nous nous sommes intéressés à certaines définitions et propriétés, ensuite à la construction des mesures martingales et le résultat d'extension de ce problème.

Au second chapitre, on considère des théorèmes d'approximations des mesures martingales par des intégrales stochastiques par rapport au mouvement Brownien et la convergence au sens de L^2 entre les problèmes initial et relaxé.

Au dernier chapitre, on définit le problème de contrôle stochastique relaxé, et la relation entre les solutions faibles des équations différentielles stochastiques et les problèmes de martingales. Ensuite on définit les règles de contrôle et on montre un résultat d'existence d'un contrôle optimal.

Mots clés : Equation différentielle stochastique, mesure martingale, contrôle stochastique, contrôle relaxé, règle de contrôle, règle optimale, martingale, mouvement Brownien.

TABLE DES MATIÈRES

0.1. Introduction	3
CHAPITRE 1. Mesures martingales et quelques propriétés	5
1.1. Motivation	5
1.2. Définitions et propriétés de bases des mesures martingales	5
1.3. Exemples des mesures martingales	9
1.3.1. L'espace E est fini	9
1.3.2. Plus généralement	9
1.3.3. Le bruit blanc	11
1.3.4. Mesures martingales images	12
1.4. Décomposition d'intensité	13
1.5. Construction des mesures martingales	14
1.6. Résultat d'extension	17
CHAPITRE 2. Approximation des mesures martingales. Application au contrôle de diffusion	21
2.1. Introduction	21
2.2. Théorème de stabilité pour les mesures martingales	25
2.3. Approximation par l'intégrale stochastique d'un mouvement Brownien	29
2.4. Application au contrôle optimal d'une diffusion avec coefficient de diffusion contrôlé	31
2.4.1. Description d'un modèle relaxé	32
2.4.2. Approximation d'un modèle relaxé	35
CHAPITRE 3. Méthodes de compactification dans le contrôle des diffusions dégénérées : Existence d'un contrôle optimal	43
3.1. Introduction à la notion de contrôle relaxé	43
3.1.1. Un exemple	43
3.1.2. Contrôles relaxés	46
3.1.3. Topologie sur l'espace \mathcal{R}	48

3.2. Solution faibles des E.D.S. et les problèmes de martingales . . .	48
3.2.1. Solution faible d'équation différentielle stochastique . . .	49
3.2.2. Espaces canoniques et problèmes de martingales	50
3.3. Notations et hypothèses	53
3.4. Règles des contrôles. Règles optimales	58
3.5. Comparaison entre les problèmes de contrôles	61