

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université du Colonel El Hadj Lakhdar - Batna -

Faculté des Sciences  
Département des Mathématiques  
Laboratoire des Techniques Mathématiques

## MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

## MAGISTER

En  
Mathématiques

Thème:

# *Contrôlabilité exacte frontière pour un système d'équations de Schrödinger couplées*

Option: Mathématiques Appliquées

Par

***Allag Ismahane***

Devant le jury composé de:

*Président* : Mr. R. BENA CER  
*Rapporteur* : Mr. S. E. REBLAI  
*Examineur*: Mr. K. MESSAOUDI  
*Examineur*: Mr. N. BENSALEM

*Prof. Université de Batna*  
*Prof. Université de Batna*  
*Prof. Université de Batna*  
*MC. Université de Sétif*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Quelques notions de base de la géométrie riemannienne</b>	<b>6</b>
2.1	Métrique riemannienne . . . . .	6
2.1.1	Métrique euclidienne . . . . .	6
2.2	Dérivée covariante et différentielle covariante . . . . .	7
2.2.1	Connexion linéaire et dérivée covariante . . . . .	7
2.2.2	Connexion de Levi-Civita . . . . .	7
2.2.3	Différentielle covariante . . . . .	8
2.2.4	Hessien d'une fonction . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Estimations de Carleman</b>	<b>11</b>
3.1	Estimations de Carleman pour une seule équation . . . . .	13
3.2	Estimations de Carleman pour le système couplé . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Contrôlabilité exacte</b>	<b>34</b>
4.1	Définition et caractérisation de la contrôlabilité exacte . . . . .	34
4.2	Contrôlabilité exacte du système couplé de type Dirichlet/ Dirichlet . . . . .	36
4.3	Contrôlabilité exacte frontière du système couplé de type Neu- mann/ Neumann . . . . .	43
4.4	Contrôlabilité exacte frontière du système couplé de type Dirich- let/ Neumann . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>62</b>
<b>6</b>	<b>Annexes</b>	<b>63</b>
6.1	Annexe A . . . . .	63
6.2	Annexe B (Contrôle optimal) . . . . .	65
6.3	Annexe C . . . . .	66

## Résumé

*Dans ce mémoire, on a établi plusieurs résultats de contrôlabilité exacte frontière pour un système couplé composé de deux équations de Schrödinger générales définies sur un ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$  de frontière lisse  $\Gamma$ , en adoptant l'approche développée par Triggiani et Yao [14] qui utilise les ingrédients suivants :*

- . Méthodes de la géométrie riemannienne.*
- . Estimations de Carleman.*
- . Analyse micro- locale.*

**Mots clés :** équations de Schrödinger, contrôlabilité exacte, contrôle frontière, estimations de Carleman, variété riemannienne.