

République Algérienne Démocratique et Populaire.  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.  
Université A. Mira de Béjaïa.  
Faculté des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur  
Département de Recherche Opérationnelle

# *Mémoire de Magister*

En  
Mathématiques Appliquées

Option

Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

*Nouvelle méthode pour la résolution des problèmes de  
programmation linéaire sous forme canonique et à variables  
bornées.*

Présenté par :  
M<sup>r</sup> Bentoubache Mohand.

Devant le jury composé de :

Président	M <sup>r</sup> D. AISSANI	Professeur	U. A/Mira Béjaïa.
Rapporteur	M <sup>r</sup> M.O. BIBI	Professeur	U. A/Mira Béjaïa.
Examineurs	M <sup>r</sup> M.S. RADJEF	Professeur	U. A/Mira Béjaïa.
	M <sup>r</sup> M.S. AIDENE	Maître de conf.	U.M.M. Tizi-Ouzou.

Béjaïa 2005.

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>2</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Rappels d'algèbre linéaire</b>	<b>8</b>
1.1 Matrices et vecteurs . . . . .	8
1.2 Espace vectoriel . . . . .	9
1.3 Matrices et vecteurs partitionnés . . . . .	10
1.4 Rang d'une matrice . . . . .	11
1.5 Discussion générale sur l'existence et le nombre de solutions d'un système linéaire . . . . .	11
1.5.1 Généralités et définitions . . . . .	11
1.5.2 Solutions basiques d'un système d'équations . . . . .	15
1.6 Méthode de Gauss pour la résolution d'un système d'équations avec une matrice régulière . . . . .	15
1.7 Méthode de Gauss-Jordan pour la résolution d'un système avec une matrice régulière . . . . .	16
1.8 Inversion d'une matrice régulière par la méthode de Gauss-Jordan . . . . .	16
1.9 Méthode de Gauss-Jordan pour un système de $m$ équations à $n$ inconnues, avec $m \leq n$ . . . . .	17
<b>2 Méthode directe de support pour la résolution d'un P.L à variables simples et à variables bornées</b>	<b>20</b>
2.1 Introduction . . . . .	20
2.2 Méthode directe de support à variables simples . . . . .	22
2.2.1 Position du problème et définitions . . . . .	22
2.2.2 Formule d'accroissement de la fonction objectif . . . . .	23
2.2.3 Critère d'optimalité . . . . .	24
2.2.4 Estimation de suboptimalité . . . . .	26
2.2.5 Algorithme de résolution . . . . .	27
2.2.6 Schéma de l'algorithme . . . . .	29
2.2.7 Exemple numérique . . . . .	30
2.3 Méthode directe de support à variables bornées . . . . .	33

2.3.1	Position du problème et définitions . . . . .	33
2.3.2	Formule d'accroissement de la fonction objectif . . . . .	34
2.3.3	Critère d'optimalité . . . . .	35
2.3.4	Estimation de suboptimalité . . . . .	37
2.3.5	Algorithme de résolution . . . . .	38
2.3.6	Schéma de l'algorithme . . . . .	40
2.3.7	Exemple numérique . . . . .	41
2.4	Méthode directe de support sous forme de tableaux . . . . .	44
2.4.1	Introduction . . . . .	44
2.4.2	Cas d'un problème à variables simples . . . . .	45
2.4.3	Cas d'un problème à variables bornées . . . . .	48
2.4.4	Calcul du vecteur des estimations en utilisant les transformations de Gauss-Jordan . . . . .	50
2.4.5	Exemple Numérique . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Méthode des deux phases de support pour la résolution d'un P.L à variables simples et à variables bornées</b>	<b>57</b>
3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Méthode des deux phases de support à variables simples . . . . .	58
3.2.1	Principe de la méthode . . . . .	58
3.2.2	Recherche d'un support initial . . . . .	59
3.2.3	Recherche d'une solution réalisable initiale . . . . .	61
3.2.4	Amélioration de la solution réalisable évidente du problème auxiliaire	64
3.2.5	Schéma de l'algorithme des deux phases de support . . . . .	67
3.2.6	Exemple numérique . . . . .	69
3.3	Méthode des deux phases du simplexe avec une seule variable artificielle . .	82
3.4	Méthode des deux phases de support à variables bornées . . . . .	84
3.4.1	Introduction . . . . .	84
3.4.2	Recherche d'un support initial . . . . .	84
3.4.3	Recherche d'une solution réalisable initiale . . . . .	85
3.4.4	Amélioration de la solution réalisable évidente du problème auxiliaire	86
3.4.5	Schéma de l'algorithme des deux phases de support à variables bornées	88
3.4.6	Exemple numérique . . . . .	90
3.5	Méthode des deux phases du simplexe à variables bornées avec une seule variable artificielle . . . . .	94
3.6	La M-Méthode de support avec une seule variable artificielle . . . . .	97
3.6.1	Introduction . . . . .	97
3.6.2	Schéma de l'algorithme . . . . .	97
3.6.3	Exemple numérique . . . . .	99
	<b>Conclusion</b>	<b>102</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>109</b>

## Résumé

Dans ce travail, une nouvelle méthode, dite méthode des deux phases de support, pour la résolution des problèmes de programmation linéaire à variables simples et à variables bornées, avec une matrice de contraintes de rang quelconque, a été proposée. Cette méthode résout le problème, sans connaissance au préalable d'une solution réalisable initiale de support. En effet, après l'élimination des contraintes redondantes et la vérification de la compatibilité du système d'équations correspondant aux contraintes principales du problème, cette méthode permet de rechercher une solution réalisable initiale de support pour initialiser la méthode directe de support, et ce, en ajoutant uniquement une seule variable artificielle au problème original. De plus, elle permet de traiter les contraintes de bornes telles qu'elles se présentent dans le problème initial.

**Mots clés.** Solution réalisable de support, variable artificielle, méthode directe de support, méthode du simplexe, méthodes des points intérieurs, méthode des deux phases de support.

## Abstract

In this work, a new method, called a two-phase support method, for solving the linear programming problems with simple and bounded variables and a constraint matrix which have an arbitrary rank, has been proposed. This method solves the problem without knowing a first feasible support solution. Indeed, after the elimination of redundant constraints and the check of the consistency of the linear equations system corresponding to the main constraints of the problem, this method finds a first feasible support solution to initialize the direct support method with adding only one artificial variable to the original problem. Furthermore, it solves the problem without transforming the bound constraints of the initial problem.

**Key words.** Feasible support solution, artificial variable, direct support method, simplex method, interior point methods, two-phase support method.